3. Sistemi ed equazioni differenziali lineari

I sistemi e le equazioni differenziali lineari rivestono una notevole importanza sia dal punto di vista matematico, sia dal punto di vista fisico.

Essi costituiscono, infatti, sostanzialmente l'unica vasta classe di sistemi ed equazioni differenziali dei quali è possibile svolgere una trattazione completa e descrivere la struttura dell'integrale generale in forma espressiva e compatta, anche se solo in casi particolari è possibile dare una formula risolutiva esplicita.

Dal punto di vista fisico si osserva che una vasta classe di fenomeni, che vengono appunto detti fenomeni lineari, può essere descritta da modelli matematici basati su equazioni e sistemi differenziali lineari. Inoltre anche i fenomeni non lineari, in prima approssimazione, possono essere descritti da fenomeni lineari.

Consideriamo, dunque, il sistema differenziale lineare

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}$$

dove $\mathbb{A}$ è una matrice $N \times N$ che dipende solo dalla variabile indipendente x, mentre $\underline{y}$ e $\underline{b}$ sono vettori a N componenti, entrambi funzioni di x. L'ipotesi fondamentale che assumiamo è che i coefficienti di $\mathbb{A}$ e le componenti del vettore $\underline{b}$ siano funzioni continue definite su un intervallo aperto I; dunque

$$a_{ij} \in C^0(I;\mathbf{R}), \quad i,j = 1,\ldots,N \qquad b_k \in C^0(I;\mathbf{R}) \quad k = 1,\ldots,N.$$

Il vettore $\underline{b}$ è indicato come <u>termine noto</u>, mentre $\mathbb{A}$ è la <u>matrice dei coefficienti</u>. Analogamente a quanto fatto nella Sezione precedente, se $\underline{b} = 0$ parliamo di sistema *omogeneo*, mentre diciamo che il sistema è *completo* se $\underline{b} \neq 0$.

Alla forma di sistema lineare si riconducono anche le equazioni lineari del tipo

$$a_0(x)y^{(N)} + a_1(x)y^{(N-1)} + \ldots + a_N y = f(x)$$

per le quali nuovamente assumiamo $a_i,\ f \in C^0(I;\mathbf{R})$. Infatti se poniamo

$$\begin{cases} y' = u \\ y'' = u' = v \\ \vdots \\ y^{(N-1)} = u^{(N-2)} = v^{(N-3)} = \ldots = w \end{cases}$$

l'equazione si riscrive in questa forma

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ v \\ \vdots \\ w \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_N}{a_0} & -\frac{a_{N-1}}{a_0} & \ldots & \ldots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \\ \vdots \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f}{a_0} \end{bmatrix}$$

Si osservi che tr$\mathbb{A} = -\dfrac{a_1}{a_0}$. Chiaramente se vogliamo che i coefficienti di $\mathbb{A}$ e le componenti di $\underline{b}$ siano continui in tutto l'intervallo I, rispetto a quanto già supposto prima, occorre anche richiedere che $a_0(x) \neq 0 \; \forall x \in I$.

come già detto, l'interesse nello studio dei sistemi lineari deriva da due fatti importanti, fra loro legati:

a) per un sistema lineare è possibile dare in maniera precisa la struttura dell'integrale generale;
b) molte applicazioni in campo fisico ed ingegneristico sono descritte in prima approssimazione da sistemi lineari.

Osservazione 1. - Dato un generico $x_0 \in I$, comunque si scelga $\underline{y}_0 \in \mathbf{R}^N$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b} \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $\underline{y} \in C^1(I; \mathbf{R}^N)$. Infatti basta applicare il Teorema di esistenza ed unicità in grande (si veda la Sezione 1), dal momento che, per la struttura stessa del sistema, le derivate rispetto a y_k del membro di destra sono forzatamente limitate nella striscia $I \times \mathbf{R}^N$ ∎.

Osservazione 2. - Una proprietà fondamentale dei sistemi lineari è il cosiddetto *Principio di sovrapposizione*. Consideriamo infatti i due sistemi

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}_1,$$

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}_2,$$

con le rispettive soluzioni $\underline{y}_1$ e $\underline{y}_2$. È immediato rendersi conto che $\underline{y}_1 + \underline{y}_2$ è soluzione del sistema

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}_1 + \underline{b}_2.$$

In particolare se $\underline{b}_1 = \underline{b}_2$ allora $z = \underline{y}_1 - \underline{y}_2$ è soluzione del sistema omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}.$$

Se poi $\underline{z}_1$ e $\underline{z}_2$ sono soluzioni del sistema omogeneo, anche una qualunque loro combinazione lineare $\alpha\underline{z}_1 + \beta\underline{z}_2$ è soluzione del medesimo sistema lineare ∎.

In base alla teoria della Sezione 1, possiamo stabilire a priori la regolarità delle soluzioni. In particolare

$$\mathbb{A} \in C^k(I), \; \underline{b} \in C^k(I) \quad \Rightarrow \quad \underline{y} \in C^{k+1}(I);$$

$$\mathbb{A} \in C^\infty(I), \; \underline{b} \in C^\infty(I) \quad \Rightarrow \quad \underline{y} \in C^\infty(I);$$

Utilizzando una terminologia tratta dall'Algebra, possiamo dire che lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (il suo integrale generale) è uno spazio vettoriale. Inoltre, se $\underline{z}$ è soluzione di un sistema omogeneo e $\underline{y}$ è soluzione di un sistema completo con la medesima matrice dei coefficienti, la loro somma è soluzione del sistema completo e, d'altro canto, fissata una soluzione $\underline{u}$ del sistema completo, ogni altra soluzione $\underline{w}$ del medesimo sistema è data dalla somma di $\underline{u}$ con una opportuna soluzione $\underline{z}$ dell'omogeneo associato. Dunque, utilizzando nuovamente una terminologia algebrica, possiamo dire che l'integrale generale di un sistema completo costituisce uno spazio affine.

Rivediamo questo discorso in altra forma. Dato il sistema lineare

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}, \tag{1}$$

consideriamo l'operatore

$$L_{\mathbb{A}} : C^1(I; \mathbf{R}^N) \ \rightarrow \ C^0(I; \mathbf{R}^N)$$
$$L_{\mathbb{A}}\underline{y} = \underline{y}' - \mathbb{A}\underline{y}.$$

È evidente che tale operatore è lineare da C^1 a C^0. Possiamo quindi riscrivere il sistema (1) come

$$L_{\mathbb{A}} y = \underline{b}. \tag{2}$$

Dato $\underline{b} \in C^0(I; \mathbf{R}^N)$, l'integrale generale di (1), che non è vuoto per quanto osservato sopra, è la controimmagine di $\underline{b}$ attraverso $L_{\mathbb{A}}$. Ben noti risultati di Algebra Lineare permettono allora di concludere che

Teorema 1. - *Sia I un intervallo aperto, $\mathbb{A}$ e $\underline{b}$ continue in I. Se $\underline{w}$ è una soluzione di (2), allora l'insieme delle soluzioni dello stesso è l'insieme $ker L_{\mathbb{A}} + \underline{w}$, cioè è l'insieme costituito da tutte le funzioni $\underline{z} + \underline{w}$ ottenute al variare di $\underline{z}$ in $ker L_{\mathbb{A}}$, integrale generale del sistema omogeneo $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$ associato al sistema completo (1).*

Osservazione 3. - Risolvere un sistema differenziale lineare comporta dunque due fasi:
a) risolvere il sistema omogeneo associato;
b) determinare un integrale particolare del sistema completo ■.

Passiamo, allora, alla risoluzione del sistema omogeneo. Sappiamo già che l'integrale generale costituisce uno spazio vettoriale. Siamo, ora, in grado di dire di più. Infatti

Teorema 2. - *Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo aperto e $\mathbb{A}$ una matrice $N \times N$ continua nell'intervallo I. Fissato comunque $x_0 \in I$, l'applicazione dallo spazio vettoriale $ker L_{\mathbb{A}}$ a $\mathbf{R}^N$ definita da*

$$\underline{v} \ \mapsto \ \underline{v}(x_0)$$

è un isomorfismo da $ker L_{\mathbb{A}}$ a $\mathbf{R}^N$. In particolare $ker L_{\mathbb{A}}$ è uno spazio vettoriale di dimensione N e una sua base è costituita dalle soluzioni degli N problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \\ \underline{z}(x_0) = \underline{z}_k \quad k = 1, \ldots, N \end{cases}$$

dove $(\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_N)$ *è una base qualunque di* $\mathbf{R}^N$.

Dimostrazione. - Per verificare che l'applicazione è un isomorfismo, occorre far vedere che si tratta di un operatore lineare iniettivo e suriettivo. La linearità è evidente. Quanto al resto, basta far vedere che $\forall (x_0, \underline{v}_0)$ con $x_0 \in I$, esiste (suriettività) ed è unica (iniettività) la soluzione del corrispondente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \\ \underline{z}(x_0) = \underline{v}_0, \end{cases}$$

ma questo è ben noto. Inoltre gli isomorfismi conservano la dimensione vettoriale degli spazi fra cui operano (che di fatto si possono identificare), per cui possiamo concludere che $dim\, ker L_{\mathbb{A}} = N$. Considerata, poi, una base di $\mathbf{R}^N$, tali vettori risultano linearmente indipendenti ed altrettanto, dunque, lo saranno gli N vettori corrispondenti in $ker L_{\mathbb{A}}$; dal momento che N vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione N sono automaticamente una base per lo stesso spazio, abbiamo concluso ▪.

Corollario. - *Se* $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, ..., $\underline{z}_N$ *sono una* N*-pla di soluzioni del sistema* $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$, *il determinante della matrice*

$$\mathbb{Z}(x) = [\underline{z}_1 | \underline{z}_2 | \ldots | \underline{z}_N]$$

non si annulla mai se le soluzioni costituiscono una base di $ker L_{\mathbb{A}}$, *mentre esso è identicamente nullo in caso contrario* ▪.

Alternativamente, il risultato precedente si può enunciare così:

Proposizione 1. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè i vettori soluzione* $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, ..., $\underline{z}_N$ *siano linearmente indipendenti è che, indicata con* $\mathbb{Z}(x)$ *la matrice che si ottiene accostando gli* N *vettori, ossia*

$$\mathbb{Z}(x) = [\underline{z}_1 | \underline{z}_2 | \ldots | \underline{z}_N],$$

risulti $det \mathbb{Z}(x) \neq 0, \ \forall\ x \in I$.

Definiamo $\mathbb{Z}(x)$ matrice wronskiana e indichiamo con $W(x)$ il suo determinante, noto come determinante wronskiano o, più semplicemente, wronskiano.

Nel caso dell'equazione lineare omogenea di ordine N

$$a_0 z^{(N)} + a_1 z^{(N-1)} + \ldots + a_N z = 0,$$

abbiamo già visto che essa si riscrive come un sistema lineare ponendo

$$\begin{aligned} z' &= u \\ u' &= v \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dunque, se z_1, z_2, ..., z_N sono N soluzioni dell'equazione, la matrice $\mathbb{Z}(x)$ ha espressione

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1' & z_2' & \dots & z_N' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{(N-1)} & z_2^{(N-1)} & \dots & z_N^{(N-1)} \end{bmatrix}.$$

In virtù della Proposizione 1, i vettori colonna sono linearmente indipendenti se e solo se $det\mathbb{Z}(x) = W(x) \neq 0, \ \forall x \in I$. D'altra parte i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le prime componenti, come è facile verificare. Il viceversa è ovvio e possiamo concludere che

Proposizione 2. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè N soluzioni di*

$$a_0 z^{(N)} + a_1 z^{(N-1)} + \ldots + a_N z = 0,$$

siano linearmente indipendenti è che

$$\forall x \in I \quad \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1' & z_2' & \dots & z_N' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{(N-1)} & z_2^{(N-1)} & \dots & z_N^{(N-1)} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vale la pena di osservare che le Proposizioni 1 e 2 sono false se i vettori considerati non sono soluzioni di un sistema lineare. In tal caso l'annullarsi del wronskiano è solo condizione necessaria, ma non sufficiente per la lineare dipendenza delle funzioni in esame. Consideriamo infatti i due vettori

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

È chiaro che $\forall x \in I \ c_1\underline{z}_1 + c_2\underline{z}_2 = 0$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$. D'altro canto

$$\det \mathbb{Z}(x) = \det \begin{bmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Da tutti i discorsi precedenti è chiaro che la conoscenza di N soluzioni linearmente indipendenti permette di scrivere l'integrale generale del sistema omogeneo. Precisamente, determinati N vettori $\underline{z}_i$ tali che $W(x) \neq 0$, poniamo

$$\underline{z} = \mathbb{Z}\underline{c}$$

dove $\underline{c}$ è un vettore di N costanti arbitrarie. In questo caso la matrice wronskiana si dice *fondamentale.*

Proposizione 3. - *Data $\mathbb{Z}(x)$ wronskiana (non necessariamente fondamentale), risulta*

$$\forall\, x \in I \qquad \mathbb{Z}'(x) = \mathbb{A}(x)\mathbb{Z}(x).$$

Dimostrazione. - Abbiamo

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{Z}'(x) = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} & \dots & z'_{1N} \\ z'_{21} & z'_{22} & \dots & z'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z'_{N1} & z'_{N2} & \dots & z'_{NN} \end{bmatrix}.$$

Poichè ogni vettore $\underline{z}_i$ è soluzione, possiamo anche dire che

$$\underline{z}'_i = \mathbb{A}\underline{z}_i;$$

accostando gli N vettori otteniamo

$$z'_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} z_{kj}$$

che è proprio l'equazione vettoriale voluta $\quad$ ▪.

Definizione. - Data $\mathbb{Z}(x)$ fondamentale, se in corrispondenza di $x = x_0$ risulta $\mathbb{Z}(x_0) = \mathbb{I}_N$, tale matrice è detta <u>risolvente</u> o <u>di transizione</u> e si indica con la scrittura $\mathbb{Z}(x; x_0)$ $\quad$ ▪.

Tale denominazione deriva dal fatto che la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \\ \underline{z}(x_0) = \underline{v}_0 \end{cases}$$

è $\underline{z} = \mathbb{Z}(x; x_0)\underline{v}_0$ e, dunque, $\mathbb{Z}(x; x_0)$ fa passare dalla soluzione al tempo x_0 alla soluzione al generico tempo x.

Proposizione 4. - *Data la matrice di transizione $\mathbb{Z}(x; x_0)$ abbiamo*
a) $\mathbb{Z}(x; x) = \mathbb{I}_N \quad \forall x \in I$;
b) $\mathbb{Z}(x; x_1)\mathbb{Z}(x_1; x_0) = \mathbb{Z}(x; x_0)$;
c) $[\mathbb{Z}(x; x_0)]^{-1} = \mathbb{Z}(x_0; x)$.

Dimostrazione. - La proprietà a) deriva dalla definizione. Infatti $\mathbb{Z}(x; x_0)$ è di transizione se $\mathbb{Z}(x_0, x_0) = \mathbb{I}_N$: data la genericità di $x_0 \in I$ abbiamo concluso. Per quanto riguarda b), per la definizione di matrice di transizione, la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \\ \underline{z}(x_0) = \underline{v}_0 \end{cases}$$

risulta $\underline{w}(x) = \mathbb{Z}(x; x_0)\underline{v}_0$, mentre la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \\ \underline{z}(x_1) = \underline{w}(x_1) \end{cases}$$

risulta $\underline{z}(x) = \mathbb{Z}(x; x_1)\underline{w}(x_1)$. D'altro canto $\underline{w}(x_1) = \mathbb{Z}(x_1; x_0)\underline{v_0}$ e dunque concludiamo che $\underline{z}(x) = \mathbb{Z}(x; x_1)\mathbb{Z}(x_1, x_0)\underline{v}_0$. Poichè inoltre $\underline{z}(x) = \mathbb{Z}(x; x_0)\underline{v}_0$, per la arbitrarietà di $\underline{v}_0$ abbiamo finito. Infine c) è una semplice conseguenza di b) $\blacksquare$.

Prima di proseguire, richiamiamo alcune nozioni di Algebra Lineare che ci serviranno nel seguito.

Proposizione 5. - *Se una matrice $N \times N$ $\mathbb{A}$ ha autovalori λ_1, λ_2, ..., λ_N, allora la matrice $\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}$ ha autovalori $1 + \epsilon\lambda_1$, $1 + \epsilon\lambda_2$, ..., $1 + \epsilon\lambda_N$.*

Dimostrazione. - Gli autovalori di $\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}$ sono le soluzioni dell'equazione algebrica nell'incognita λ

$$\det(\lambda\mathbb{I}_N - (\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A})) = 0.$$

Abbiamo

$$\det((\lambda - 1)\mathbb{I}_N - \epsilon\mathbb{A}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\frac{\lambda - 1}{\epsilon}\mathbb{I}_N - \mathbb{A}) = 0.$$

Posto $\mu = \frac{\lambda-1}{\epsilon}$, ricaviamo $\det(\mu\mathbb{I}_N - \mathbb{A}) = 0$ da cui otteniamo

$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \ldots, \quad \mu_N = \lambda_N,$$

cioè anche

$$\lambda = 1 + \epsilon\lambda_1, \ \ldots, \ 1 + \epsilon\lambda_N \quad \blacksquare.$$

Proposizione 6. - *Data una matrice $N \times N$ $\mathbb{A}$ di autovalori λ_1, ..., λ_N, per $\epsilon \to 0$ risulta*

$$\det(\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}) = 1 + \epsilon \mathrm{tr}\, \mathbb{A} + O(\epsilon^2).$$

Dimostrazione. - In base alle note proprietà che legano il determinante agli autovalori della matrice, abbiamo

$$\det(\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{N}(1 + \epsilon\lambda_i) = 1 + \epsilon\sum_{i=1}^{N}\lambda_i + O(\epsilon^2) =$$

$$= 1 + \epsilon \mathrm{tr}\mathbb{A} + O(\epsilon^2) \quad \text{per } \epsilon \to 0^+ \quad \blacksquare.$$

Indichiamo lo spazio delle matrici $N \times N$ con $M^{N\times N}$; su di esso mettiamo una norma (non è difficile verificare che si tratta effettivamente di una norma) definita da

$$\|\mathbb{A}\|_{M^{N\times N}} = \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Dotato lo spazio $M^{N\times N}$ della struttura normata, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{A}_k$ si dirà convergente se la successione delle somme parziali è convergente rispetto a tale norma. Di particolare interesse è la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^k}{k!}$; tale serie definisce la matrice esponenziale $e^{\mathbb{A}}$ che potrebbe anche essere definita equivalentemente da $\displaystyle\lim_{k\to\infty}(\mathbb{I}_N+\frac{\mathbb{A}}{k})^k$. In generale calcolare la matrice esponenziale è complesso. Tuttavia, se $\mathbb{A}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\ldots,\lambda_N]$, allora

$$e^{\mathbb{A}}=\mathrm{diag}[e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_N}].$$

Se $\mathbb{A}$ è diagonalizzabile tramite $\mathbb{S}$, ossia se $\tilde{\mathbb{A}}=\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$ con $\tilde{\mathbb{A}}$ diagonale, allora

$$e^{\tilde{\mathbb{A}}}=\mathrm{diag}[e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_N}] \qquad \text{e} \qquad e^{\mathbb{A}}=\mathbb{S}e^{\tilde{\mathbb{A}}}\mathbb{S}^{-1}.$$

A fronte della difficoltà del calcolo esplicito di $e^{\mathbb{A}}$, il suo determinante è di facile valutazione. Infatti

$$\det e^{\mathbb{A}}=\det\left(\lim_{k\to\infty}(\mathbb{I}_N+\frac{\mathbb{A}}{k})^k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\det(\mathbb{I}_N+\frac{\mathbb{A}}{k})^k\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\det(\mathbb{I}_N+\frac{\mathbb{A}}{k})\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{k}(1+\frac{\lambda_j}{k})\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{A}}{k}+O(\frac{1}{k^2})\right)^k=e^{\mathrm{tr}\,\mathbb{A}}.$$

Da questo ricaviamo in particolare che $e^{\mathbb{A}}$ non è mai singolare. Concludiamo ricordando alcune proprietà di $e^{\mathbb{A}}$ di facile verifica.

Proposizione 7. - *Sia data una matrice $N\times N$ costante $\mathbb{A}$. Risulta allora*
a) $e^{0\mathbb{A}}=\mathbb{I}_N$;
b) $e^{t\mathbb{A}}\cdot e^{s\mathbb{A}}=e^{(t+s)\mathbb{A}}$;
c) $[e^{t\mathbb{A}}]^{-1}=e^{-t\mathbb{A}}$;
d) $\dfrac{d}{dt}e^{t\mathbb{A}}=\mathbb{A}e^{t\mathbb{A}}$.

Dimostrazione. - La proprietà a) è immediata e c) è una conseguenza diretta di a) e b) (basta infatti prendere $s=-t$). Verifichiamo b). Abbiamo

$$e^{t\mathbb{A}}=(\mathbb{I}_N+t\mathbb{A}+\frac{t^2}{2}\mathbb{A}^2+\ldots)$$

$$e^{s\mathbb{A}}=(\mathbb{I}_N+s\mathbb{A}+\frac{s^2}{2}\mathbb{A}^2+\ldots)$$

Perciò

$$e^{t\mathbb{A}}\cdot e^{s\mathbb{A}}=(\mathbb{I}_N+t\mathbb{A}+\frac{t^2}{2}\mathbb{A}^2+\ldots)(\mathbb{I}_N+s\mathbb{A}+\frac{s^2}{2}\mathbb{A}^2+\ldots)=$$

$$(\mathbb{I}_N + (t+s)\mathbb{A} + \frac{1}{2}(t^2 + 2ts + s^2)\mathbb{A}^2 + \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty}(t+s)^k \frac{\mathbb{A}^k}{k!} = e^{(t+s)\mathbb{A}}.$$

Concludiamo con la verifica della proprietà d). Abbiamo

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbb{A}} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\mathbb{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}\mathbb{A}^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{t^{k-1}}{k!}\mathbb{A}^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{A}\,\mathbb{A}^{k-1} = \mathbb{A}\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\mathbb{A}^k}{k!} = \mathbb{A}\, e^{t\mathbb{A}} \quad \blacksquare.$$

Torniamo ora ai sistemi differenziali lineari. Abbiamo detto prima che il wronskiano $W(x)$ o è sempre diverso da zero o è sempre uguale a zero. La Proposizione che segue esprime quantitativamente tale fatto.

Proposizione 8 (Teorema di Liouville). - *Data una matrice wronskiana $\mathbb{Z}(x)$ e preso $x_0 \in I$, $\forall\, x \in I$ il suo determinante $W(x)$ soddisfa la seguente relazione*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{N} a_{kk}(t)\, dt} = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, \mathbb{A}(t)\, dt}.$$

Dimostrazione. - Poichè $\mathbb{Z}' = \mathbb{A}\mathbb{Z}$, preso $\epsilon > 0$, per ogni intervallo $]x_0, x_0+\epsilon[\in I$ abbiamo per il Teorema di Lagrange

$$\mathbb{Z}(x_0+\epsilon) = \mathbb{Z}(x_0)+\epsilon\mathbb{Z}'(x_0)+o(\epsilon) = \mathbb{Z}(x_0)+\epsilon\mathbb{A}(x_0)\mathbb{Z}(x_0)+o(\epsilon) = (\mathbb{I}_N+\epsilon\mathbb{A}(x_0))\mathbb{Z}(x_0)+o(\epsilon).$$

Passando ai determinanti, otteniamo

$$W(x_0+\epsilon) = \det\left((\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}(x_0))\mathbb{Z}(x_0)\right) + o(\epsilon) = W(x_0)\cdot \det\left(\mathbb{I}_N + \epsilon\mathbb{A}(x_0)\right) + o(\epsilon) =$$

$$= W(x_0)(1 + \epsilon \mathrm{tr}\, \mathbb{A}(x_0) + O(\epsilon^2)) + o(\epsilon) = W(x_0)(1 + \epsilon \mathrm{tr}\, \mathbb{A}(x_0)) + o(\epsilon).$$

Perciò, dividendo tutto per ϵ, otteniamo

$$\frac{W(x_0+\epsilon) - W(x_0)}{\epsilon} = W(x_0)\mathrm{tr}\, \mathbb{A}(x_0) + o(1).$$

Il membro di destra ammette limite per $\epsilon \to 0$ e tale limite vale $W(x_0)\mathrm{tr}\, \mathbb{A}(x_0)$. Conseguentemente anche il membro di sinistra ha limite finito e vale $W'(x_0)$. Quindi $W'(x_0) = W(x_0)\mathrm{tr}\, \mathbb{A}(x_0)$. Integrando otteniamo proprio la tesi $\blacksquare$.

Osservazione. - Dalla relazione precedente è chiaro che se $W(x_0) \neq 0$, allora $W(x) \neq 0$ $\forall\, x \in I$. Se, invece, $W(x_0) = 0$, allora $W(x) = 0$ in tutto l'intervallo I $\blacksquare$.

Nel caso delle equazioni lineari omogenee, come già osservato in precedenza, il sistema lineare equivalente è tale per cui $\mathrm{tr}\, \mathbb{A} = -\dfrac{a_1}{a_0}$; perciò in questo caso il Teorema di Liouville si esprime dicendo che

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt}.$$

Per i sistemi omogenei, come dovrebbe ormai essere chiaro, il punto fondamentale è la determinazione di N integrali linearmente indipendenti. Nella prossima sezione esamineremo in dettaglio il caso dei sistemi a coefficienti costanti, per i quali si sa dare la soluzione in forma esplicita. Qui concludiamo la trattazione generale, considerando il caso dei sistemi completi.

Dato, dunque, il sistema completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}$$

e indicata con $z\mathbb{A}(x)$ una matrice fondamentale per il corrispondente sistema omogeneo, l'integrale generale $\underline{y}$ ha l'espressione

$$\underline{y}(x) = \mathbb{Z}(x)\underline{c} + \underline{w}(x),$$

dove $\underline{c}$ è un vettore di costanti arbitrarie e $\underline{w}$ un integrale particolare del sistema completo. Per determinare quest'ultimo, l'idea (dovuta originariamente a Lagrange) è quella di cercare $\underline{w}(x)$ nella forma

$$\underline{w}(x) = \mathbb{Z}(x)\underline{c}(x),$$

dove $\underline{c}(x)$ è un opportuno vettore da determinare. Questo metodo va sotto il nome di *Metodo di variazione delle costanti arbitrarie.* Scelto, dunque $\underline{w}$ della forma indicata sopra, è facile vedere che

$$\underline{w}' = \mathbb{Z}'\underline{c} + \mathbb{Z}\underline{c}'.$$

Sostituendo nel sistema abbiamo

$$\mathbb{Z}'\underline{c} + \mathbb{Z}\underline{c}' = \mathbb{A}\mathbb{Z}\underline{c} + \underline{b} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{Z}' - \mathbb{A}\mathbb{Z})\underline{c} + \mathbb{Z}\underline{c}' = \underline{b}.$$

Per la Proposizione 3 il primo termine del membro a sinistra si annulla. Ricordando, inoltre, che $\mathbb{Z}$ è fondamentale, otteniamo

$$\underline{c}' = \mathbb{Z}^{-1}\underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{c}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbb{Z}^{-1}(t)\underline{b}(t)\,dt$$

ed anche

$$\underline{w}(x) = \mathbb{Z}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbb{Z}^{-1}(t)\underline{b}(t)\,dt.$$

Se poi ci interessa la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b} \\ \underline{y}(x_0) = \underline{v}_0, \end{cases}$$

introducendo la matrice di transizione e sfruttandone le proprietà viste prima, abbiamo

$$\underline{y}(x) = \mathbb{Z}(x;x_0)\underline{v}_0 + \mathbb{Z}(x;x_0)\int_{x_0}^{x} \mathbb{Z}(x_0;t)\underline{b}(t)\,dt.$$

Nel caso delle equazioni lineari di ordine N, possiamo applicare il risultato precedente e poi considerare solo la prima componente del vettore così costruito. In realtà è possibile dare una espressione più diretta dell'integrale particolare dell'equazione completa.

Senza entrare nel dettaglio del calcolo, data una matrice fondamentale per l'equazione di ordine N, abbiamo

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_N(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) & \dots & z_N'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{(N-1)}(t) & z_2^{(N-1)}(t) & \dots & z_N^{(N-1)}(t) \end{bmatrix}$$

e definiamo

$$W_{N1}(x,t) = \det \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_N(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) & \dots & z_N'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1(x) & z_2(x) & \dots & z_N(x) \end{bmatrix}.$$

Ricaviamo allora

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{N1}(x,t)}{W(t)} \frac{f(t)}{a_0(t)} \, dt.$$

In effetti, come vedremo anche meglio nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, in molti casi la ricerca degli integrali particolari può essere semplificata ricorrendo ad opportune tabelle.