Analisi Matematica 1 - 24/01/25 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sinh\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right) - \sin\left(\frac{2}{n^{1/2}}\right)\right)^{\alpha}$ converge?

A2.* Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_o = \dfrac{1}{4}$ di $f(x) = \tan(\arcsin(2x))$.

A3. Calcolare $L_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[4]{1+\frac{8}{n}} - 1\right]\left[\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}} - 1\right]}{\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}$;

$L_2 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(1-\cos\left(\frac{e^{2/x}}{x}\right)\right)}$.

A4. Calcolare la seguente somma di integrali: $\displaystyle\int_1^2 e^x \frac{\arctan^8(e^x)}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{-1}^{1} |x|\,dx + \int_{-1}^{1} \sin^{1001}(x)\,dx.$

A5.* Determinare il punto di minimo assoluto x_m e il minimo assoluto m di $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\sqrt{\frac{x+10}{x}}}$; $x_m =$ $m =$

Per quali $\lambda > 0$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette due radici distinte?

A6. Calcolare $\mathrm{Re}\left[\dfrac{(z-4i)^2}{z+2i}\right]$, dove $z = 2+2i$.

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $\dfrac{|z|^2}{z} - \dfrac{6\bar{z}}{z^8} = 0$.

A7. Sia $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|2x|}{|2x|+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Calcolare le derivate sinistra e destra di f in 0.

A8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u''(t) - 8u'(t) + 12u(t) = e^{6t}, \\ u(0) = 0, \qquad u'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

B1. Data $f(x) = \sinh(5x^2)$, il polinomio di Taylor/Mc Laurin di ordine 7 della f centrato in $x = 0$ è $\boxed{\text{A}}$ $5x^2 - \dfrac{125}{6}x^6$. $\boxed{\text{B}}$ $5x^2 + \dfrac{125}{6}x^6$. $\boxed{\text{C}}$ $x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!}$. $\boxed{\text{D}}$ $5x^2 + \dfrac{125}{6}x^6 + o(x^7)$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan(\ln|x|)$ se $x \neq 0$, $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f non è superiormente limitata. $\boxed{\text{B}}$ f è strettamente crescente. $\boxed{\text{C}}$ f è strettamente decrescente. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $\mathbb{R}$.

B3.* Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ non esiste. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{|a_n|}$ non esiste. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n a_n$ non esiste. $\boxed{\text{C}}$ Esiste $\varepsilon > 0$ tale che esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ vale $|a_n - 1| > \varepsilon$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(a_n)$ non esiste.

B4. Sia $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ una funzione decrescente con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f^2(n)$ converge $\boxed{\text{B}}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge $\boxed{\text{C}}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n^2} f(n^2)$ converge $\boxed{\text{D}}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n^2)$ converge

B5.* Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e f' crescente in $[a, b]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $(f^{-1})'$ è crescente $\boxed{\text{B}}$ f^{-1} è decrescente $\boxed{\text{C}}$ f^{-1} è concava $\boxed{\text{D}}$ f^{-1} è convessa

B6. Siano $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ e $f'(x) \sim g'(x)$ per $x \to c$ allora risulta $\boxed{\text{A}}$ $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ $\boxed{\text{B}}$ $g(x) = o(f(x))$ per $x \to c$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{f(x)}{g(x)} \sim x$ per $x \to c$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$

B7. Sia $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sin t \, dt$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ F è monotona. $\boxed{\text{B}}$ F' ha infiniti zeri. $\boxed{\text{C}}$ F ha un punto di non derivabilità. $\boxed{\text{D}}$ $F''(0) = 0$.

B8. Sia $f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$ tale che $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(2 + \dfrac{4}{n}\right) = 4$. $\boxed{\text{B}}$ $f(2) = 4$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(2 - \dfrac{3}{n}\right) = f(2)$. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in $x_o = 2$.