Analisi Matematica I - 23/09/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x\ln\frac{1}{x} + x^{10}e^{-x})(2x^6+1)}{3x^7\ln x + \arctan x}$.

A2. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 5x - \operatorname{sen}^2(x)$. Sia $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua inversa, calcolare $(g^{-1})'(0)$.

A3. Sia $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}\, dt$. Scrivere il polinomio di Taylor di f di ordine 2 nel punto 1.

A4. Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{2n^\alpha}\right)}{e^{-2/n^2} + \ln(5+e^{2n})}.$$

A5.[⋆] Stabilire se il seguente integrale $\int_2^{+\infty} e^{\alpha x} - \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ converge o diverge (indicando se a $+\infty$ o a $-\infty$)

per $\alpha < 0$ $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$.

A6.[⋆] Determinare le primitive di $f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\ln x)}{x}$.

A7. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + u' - 2u = 0 \\ u(0) = -1 \\ u'(0) = -7 \end{cases}$$

A8.[⋆] Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x) = e^{x^2+3}(5x^2+2)$ in $[-1, 2]$, precisando i punti dove sono assunti.

A9.[⋆] Calcolare le radici dell'equazione $z^4 - 2\cdot 2z^2 + 2^2 = -3\cdot 2^2$.

A10. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{n}\right) - e^{-2/n^2}}{\sin\left(\frac{3}{n^4}\right)}$

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f non ha massimo ma ha minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ f ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{C}}$ f ha massimo ma non ha minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ f non ha né massimo né minimo in $\mathbb{R}$.

B2. Siano a_n e b_n due successioni. Se a_n è limitata e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = -\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n)$ esiste finito. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n)$ non esiste.

B3.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in x_0 con $f(x_0) > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ in ogni intorno di x_0 f assume solo valori positivi. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) > 0 \Rightarrow x = x_0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) > 0$ per ogni $x \in \left(x_0 - \dfrac{1}{100}, x_0 + \dfrac{1}{100}\right)$. $\boxed{\text{D}}$ esistono infiniti punti x tali che $f(x) > 0$.

B4.* Sia $f : [a,b] \to [0,1]$ continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| > \int_a^b |f(x)|\,dx$. $\boxed{\text{B}}$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. $\boxed{\text{C}}$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx$. $\boxed{\text{D}}$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \neq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste x_c tale che $f(x_c) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ esiste x_c tale che $f(x_c) = -1$. $\boxed{\text{C}}$ esiste x_c tale che $f(x_c) > 1$. $\boxed{\text{D}}$ esiste x_c tale che $f(x_c) = 1$.

B6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è derivabile venticinque volte in $x = 0$. $\boxed{\text{B}}$ f non è derivabile in $x = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f'(0) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(0) = 1$.

B7.* Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Definiamo $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $F'(x) = f(x^2)$. $\boxed{\text{B}}$ $F'(x) = f(x)x^2$. $\boxed{\text{C}}$ $F(x) \geq 0$, per ogni x in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ $F'(0) = 0$.

B8. Si consideri $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$. Allora la serie converge se $\boxed{\text{A}}$ $a_{n+1} \geq a_n$. $\boxed{\text{B}}$ $a_{n+1} \leq a_n$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

B9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -5x^3$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 3x$ se $x > 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è concava. $\boxed{\text{B}}$ f è derivabile. $\boxed{\text{C}}$ f è crescente. $\boxed{\text{D}}$ f è convessa.

B10.* Siano f e g due funzioni tali che $f(x) = 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ e $g(x) = x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $g(x) = o(f(x))$ per $x \to 0$.

Soluzioni della prova del 23/09/19

Parte A

A1. Al numeratore il primo fattore $x \ln \dfrac{1}{x} + x^{10}e^{-x} = -x\ln x + x^{10}e^{-x}$ è la somma di un infinito e di un infinitesimo. Dunque il numeratore è asintotico a $(-x\ln x)(2x^6) = -2x^7 \ln x$. Il denominatore è asintotico a $3x^7 \ln x$, essendo $\arctan x$ limitata. Dunque il limite richiesto è $-\dfrac{2}{3}$.

A2. Si ha $g(0) = 0$ e quindi $(g^{-1})'(0) = 1/g'(0)$. Essendo $g'(x) = 5 + 2\sin(x)\cos(x)$, si ottiene $1/5$.

A3. Siccome $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt$, si ha $f'(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Quindi $f(1) = 0$, $f'(1) = \sqrt{2}$, $f''(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Usando i valori calcolati sopra, il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 1 risulta $P(x) = \sqrt{2}(x-1) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)^2$.

A4. Posto

$$a_n = \frac{\tan\left(\frac{1}{2n^\alpha}\right)}{e^{-2/n^2} + \ln(5 + e^{2n})},$$

abbiamo

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{2n^\alpha}}{\ln(e^{2n})} = \frac{1}{4n^{\alpha+1}}.$$

Pertanto, la serie converge se $\alpha + 1 > 1$, ossia per ogni $\alpha > 0$.

A5. Per $\alpha < 0$ si ha $e^{\alpha x} - x^{-3/2} \sim x^{-3/2}$ per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale converge.
Per $\alpha = 0$ si ha $e^{\alpha x} - x^{-3/2} \sim 1$ per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge a $+\infty$.
Per $\alpha = 0$ si ha $e^{\alpha x} - x^{-3/2} \sim e^{\alpha x}$ per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge a $+\infty$.

A6. Posto $t = \ln x$, da cui $dt = \dfrac{1}{x}dx$, risulta

$$\int \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\ln x)}{x}dx = \int \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right) + c.$$

A7. L'equazione omogenea ha soluzione $c_1e^t + c_2e^{-2t}$ per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Le condizioni iniziali sono verificate per $c_1 = -3$ e $c_2 = 2$. Quindi $u(t) = -3e^t + 2e^{-2t}$.

A8. La funzione ammette massimo e minimo assoluti grazie al Teorema di Weierstrass. Siccome $f'(x) = e^{x^2+3}x(10x^2 + 14)$ risulta $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Quindi la funzione è crescente in $[0, 2]$ e decrescente in $[-1, 0]$. Pertanto $x = 0$ è il punto di minimo assoluto mentre per il massimo assoluto basta osservare che $f(-1) = 7e^4$ mentre $f(2) = 22e^7$. Pertanto il massimo assoluto di f è $22e^7$ raggiunto in $x = 2$, il minimo assoluto è $2e^3$ raggiunto in $x = 0$.

A9. L'equazione

$$z^4 - 2\cdot 2z^2 + 2^2 = -3\cdot 2^2$$

può essere riscritta come

$$(z^2-2)^2 = -3\cdot 2^2,$$

da cui otteniamo

$$z^2 - 2 = \pm 2\sqrt{3}i,$$

ed anche

$$z^2 = 2\left[1 \pm \sqrt{3}i\right] = 4\left[\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right].$$

Poiché

$$4\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=4\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right],\quad 4\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=4\left[\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right],$$

abbiamo

$$z_k=2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right],\quad k=0,1$$

e

$$z_n=2\left[\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2n\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2n\pi}{2}\right)\right],\quad n=0,1.$$

Pertanto, le quattro soluzioni sono

$$z_{k=0}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$z_{k=1}=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$z_{n=0}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$$

$$z_{n=1}=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$$

A10. Osserviamo che

$$\cos\left(\frac{2}{n}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{4}{n^2}+\frac{1}{4!}\frac{16}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

$$e^{-2/n^2}=1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{2}\frac{4}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

$$\sin\left(\frac{3}{n^4}\right)=\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{2}{n}\right)-e^{-2/n^2}}{\sin\left(\frac{3}{n^4}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{16}{24}\frac{1}{n^4}-1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^4}}{\frac{3}{n^4}}=\frac{\frac{2}{3}-2}{3}=-\frac{4}{9}.$$

Parte B

B1. $\boxed{\text{B}}$ La funzione è dispari, continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ e $\forall\, x\in(0,+\infty)$ abbiamo $f(x)>0$. Pertanto f è limitata ed ha certamente massimo in $(0,+\infty)$. Per simmetria, f ha minimo in $(-\infty,0)$.

B2. $\boxed{\text{A}}$ $a_n-b_n\sim b_n$ per $n\to+\infty$.

B3. $\boxed{\text{D}}$ Dal teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 in cui f assume solo valori positivi.

B4. $\boxed{\text{B}}$ Essendo f a valori in $[0,1]$ si ha $|f(x)|=f(x)$ e $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$. Quindi $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b|f(x)|\,dx$.

B5. $\boxed{\text{A}}$ Dal teorema degli zeri.

B6. $\boxed{\text{C}}$ Applichiamo la definizione di derivata prima. Abbiamo

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

B7. $\boxed{\text{D}}$ Combinando il teorema fondamentale del calcolo integrale con il teorema di derivazione della funzione composta si ha $F'(x) = f(x^2)2x$.

B8. $\boxed{\text{D}}$ Se $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, risulta $|a_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pertanto, la serie converge assolutamente e quindi converge.

B9. $\boxed{\text{D}}$ È sufficiente disegnare il grafico di f per osservare che f è convessa e non soddisfa le altre proprietà.

B10. $\boxed{\text{D}}$ Dalla definizione di o piccolo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{2x^2 + x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0.$$