Analisi Matematica 1 - 23/01/26 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ☐ **Cognome** ☐ **Nome** ☐

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = 2\tan(\pi e^{-2x})$ nel punto $x_0 = \ln 2$.

A2.* Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\, e^{3x-x^2}$, determinare i punti di massimo e di minimo locale o relativo ☐ e il massimo e il minimo assoluti. ☐

A3. Scrivere in forma algebrica le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione: $\overline{z}^2 + 6\, Im(z) + 2i\overline{z} + z\overline{z} = 12$

A4. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{8}{2n^3 + n^2}\right)^{3n^3+\sqrt{n}} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(8x^2) + e^{x^3} - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)} =$

A5. Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = -5y(x) + 2\sinh(4x)$

A6. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle J = \int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{\ln(2+e^x)}{2+e^x}e^x\, dx.$

$J =$

A7.* Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono entrambi gli l'integrali impropri

$$I_1 = \int_2^3 \frac{(1-e^{x-4})^{2\alpha}}{[\ln(1+(x-2))]^{\alpha}[\sin(4-x)]^{2-2\alpha}}\, dx, \quad I_2 = \int_3^4 \frac{(1-e^{x-4})^{2\alpha}}{[\ln(1+(x-2))]^{\alpha}[\sin(4-x)]^{2-2\alpha}}\, dx.$$

A8. Determinare (usando gli sviluppi noti) il polinomio di Taylor-McLaurin di grado 2 e centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^{9+x^2}(1+x)^{\frac{1}{3}}$:

B1.* Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni reali positive, tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. Allora:

A $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{a_n}$ diverge. B $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge. C $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ diverge. D $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ diverge.

B2. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Data $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = e^{f(x)}$, allora A $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c)e^{f(c)}(b-a) = e^{f(b)} - e^{f(a)}$. B $\exists c \in (a,b)$ tale che $e^{f'(c)}(b-a) = e^{f(b)} - e^{f(a)}$. C $\exists$ unico $c \in (a,b)$ tale che $f'(c)e^{f(c)}(b-a) = e^{f(b)} - e^{f(a)}$. D $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c)(b-a) = e^{f(b)} - e^{f(a)}$.

B3. Sia $G(x) = \int_0^{x^2} \sin^3\left(\sqrt{|t|}\right) dt$. Allora A $G'(x) = \sin^3(x)2x$ B $G'(x) = \sin^3(|x|)2x$ C $G'(x) = \sin^3(x)$ D $G'(x) = \sin^3(|x|)$

B4.* Sia $p(x) = a + bx + cx^2$ il polinomio di MacLaurin (Taylor con centro $x_0 = 0$) di ordine 2 per una funzione $f \in C^2(\mathbb{R})$. Si consideri la funzione $g(x) = xf(x^2)$. Il polinomio di MacLaurin di ordine 3 per la funzione g è A $a + bx^2 + cx^4$ B $ax + bx^3 + cx^5$ C $ax + bx^3$ D $ax + bx^2 + cx^3$

B5. Dato $K = [1,2] \cup [3,4]$, sia $f : K \to \mathbb{R}$, continua su K e tale che $f(1) = -2$, $f(4) = 3$. Allora A f è crescente in K. B f ha massimo e minimo assoluti in K. C $\exists x_o \in K$ tale che $f(x_o) = 0$. D $\exists \delta > 0$ tale che $\forall\, x \in (1, 1+\delta)$ risulta $f(x) > 0$.

B6. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $f(x) \sim x - x_o$ per $x \to x_o$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \ln(1 + [f(x)]^2)$. Allora A $g(x) = o((x - x_o)^2)$ per $x \to x_o$. B $g(x) \sim 2(x - x_o)$ per $x \to x_o$. C $g(x) \sim 2\ln|x - x_o|$ per $x \to x_o$. D $g(x) = o(x - x_o)$ per $x \to x_o$.

B7. Quale tra le seguenti fornisce una definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. A $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \bar{n}$ $|a_n - \ell| \geq \varepsilon \; \forall n > \bar{n}$ B $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ tale che $|a_n - \ell| \leq \varepsilon \; \forall n > \bar{n}$ C $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ tale che $|a_n - \ell| \leq \varepsilon \; \forall n < \bar{n}$ D $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ tale che $|a_n - \ell| \geq \varepsilon \; \forall n > \bar{n}$

B8. Sia (a_n) una successione di numeri reali definitivamente monotona. Allora: A $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste finito. B Se (a_n) è definitivamente decrescente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n < +\infty$. C $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n)$ non esiste. D Se (a_n) è definitivamente crescente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.