A1.* Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale risulta convergente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x} + \arctan(7x)} dx$$

A2.* Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa $y'' - 7y' + 12y = 2e^x$.

A3.* Si consideri la funzione $f(x) = \frac{|(x+3)(x-4)|}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinare gli eventuali estremi di f nel suo insieme di definizione, specificando in quali punti vengono assunti e se si tratta di estremi locali o globali.

A4. Calcolare il valore del limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{n}) - \frac{2}{n} - \cos(\frac{2}{n}) + 1}{\sin(\frac{5}{n^3})}$.

A5.* Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} \sin(x^2) - 2xe^{9x}}{e^{\alpha x}}$.

A6. Scrivere lo sviluppo di Taylor/Mac Laurin centrato in 0 per la funzione $f(x) = (e^x - 1) \sin(-2x)$ di ordine 4.

Calcolare $f^{(4)}(0)$.

A7. Data $f(x) = 4x + \arctan(2x)$ e denotata con f^{-1} la sua inversa, calcolare $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{y}$.

A8. Calcolare l'integrale $\int_0^{\pi/14} \frac{\cos(7x)}{1 + \sin^2(7x)} dx$

A9. Calcolare $\left(\frac{z}{|z|} - i\frac{|z|}{z}\right)\left(\frac{z}{|z|} + i\frac{|z|}{z}\right)$ per $z = 1 + 2i$.

A10. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)}{n^\alpha + n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}$.

B1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, tale $f(a) = f(b)$. Allora A se f ha massimo in $[a, b]$, allora non ha minimo. B se f ha minimo in $[a, b]$, allora non ha massimo. C f ammette massimo e minimo in $[a, b]$. D esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

B2. Sia $z = a - ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora A $\text{Im}(z^2) = -2abi$. B $|z|^2 = a^2 - b^2$. C $\text{Re}(z^2) = a^2 - b^2$. D $z^2 = a^2 - b^2$.

B3. * Sia $f(x) \sim x \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$ e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. A Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) = o(x^{3/2})$ per $x \rightarrow 0^+$. B Se $g'(0) = 1$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x^2 \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$. C Se $g(0) \neq 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$. D Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim g'(0)x^2$ per $x \rightarrow 0^+$.

B4* Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $g(x) := (f(x))^2$. Supponiamo che g sia derivabile in $\mathbb{R}$. A Se $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ allora f è derivabile in $\mathbb{R}$. B Se f è derivabile in $\mathbb{R}$ allora $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. C Se $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ allora f è derivabile in $\mathbb{R}$. D Anche f è derivabile in $\mathbb{R}$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Allora A f è limitata e continua. B f è monotona e continua. C f è dispari e limitata. D f è pari e limitata.

B6. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che esistano finiti i limiti $L_0 := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $L_1 := \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. A $L_0 = f(0)$ e $L_1 = f(1)$. B Se $L_0 \cdot L_1 < 0$ allora esistono due punti $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tali che $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. C Se $L_0 \cdot L_1 < 0$ allora f si annulla in almeno un punto di $[0, 1]$. D Se $f(0) = L_0$ e $f(1) = L_1$ allora f è limitata in $[0, 1]$

B7* Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente. Allora A $\forall n \geq 0$ risulta $a_{n+1} \leq a_n$. B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. C converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. D $\forall n \geq 1$ risulta $a_n \leq \frac{1}{n^2}$.

B8. * Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona e (x_n) una successione strettamente positiva tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora A $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$. B $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$. C $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \ell$, per ogni successione (a_n) convergente a 0. D $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$.

B9. Sia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$. Allora A $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > L - \epsilon$. B $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > 0$. C $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ $a_n > 0$. D $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < L + \epsilon$.

B10. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Allora A $|f|$ ammette minimo assoluto. B f è strettamente crescente. C $|f|$ ammette massimo assoluto. D f ammette massimo e minimo assoluti.

Soluzioni della prova del 23/01/20

Parte A

A1. La funzione $f(x) = \frac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x} + \arctan(7x)}$ è strettamente positiva e continua in $[2, +\infty)$. Se $\alpha > 0$, allora $f(x) \sim \frac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x}}$ per $x \rightarrow +\infty$ e $\frac{x^{2+\alpha}}{e^{2\alpha x}} \leq \frac{1}{x^2}$ per x grande. Siccome $\frac{1}{x^2}$ è integrabile all'infinito, per confronto e confronto asintotico anche $f(x)$ lo è.

Se $\alpha \leq 0$ allora $f(x) \sim \frac{x^{2+\alpha}}{c}$ per $x \rightarrow +\infty$, dove $c = 1 + \pi/2$ se $\alpha = 0$ e $c = \pi/2$ se $\alpha < 0$.

La funzione $x^{2+\alpha} = \frac{1}{x^{-2-\alpha}}$ è integrabile all'infinito se $-2 - \alpha > 1$ ossia per $\alpha < -3$. Così anche f è integrabile all'infinito per $\alpha < -3$.

In conclusione l'integrale dato converge se $\alpha > 0$ oppure $\alpha < -3$.

A2. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è $\frac{1}{3}e^x$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3}e^x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A3. Studiando la funzione $g(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{x^2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si trova $g'(x) = \frac{x^2 + 24x}{x^4} > 0$ se $x < -24$ oppure $x > 0$ e $g(-24) = 49/48$. Inoltre: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1$ e $g(-3) = g(4) = 0$. rappresentando il grafico di g e poi quello di $f = |g|$ si trova che i punti $x = -3$ e $x = 4$ sono di minimo assoluto per f con $f(-3) = f(4) = 0$ e $x = -24$ è un punto di massimo locale con $f(-24) = 49/48$.

A4. Dagli sviluppi delle funzioni elementari si ha $\ln(1+t) - t - \cos t + 1 \sim \frac{1}{3}t^3$ per $t \rightarrow 0$. Pertanto $\ln(1 + \frac{2}{n}) - \frac{2}{n} - \cos \frac{2}{n} + 1 \sim \frac{1}{3} \frac{8}{n^3}$ per $n \rightarrow +\infty$. Inoltre $\sin(\frac{5}{n^3}) \sim \frac{5}{n^3}$ per $n \rightarrow +\infty$. Dunque il limite richiesto è $8/15$.

A5. Il numeratore è asintotico a $-2xe^{9x}$ per $x \rightarrow +\infty$, essendo $\frac{2}{x} \sin(x^2)$ infinitesima. Quindi la funzione completa è asintotica a $-2xe^{(9-\alpha)x}$ per $x \rightarrow +\infty$. Il limite richiesto è 0 se $\alpha > 9$ e $-\infty$ se $\alpha \leq 9$.

A6. Usiamo gli sviluppi delle funzioni elementari:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1\right) \left(-2x + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)\right) = -2x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

per $x \rightarrow 0$. Si ha $f^{(4)}(0) = 24$.

A7. Osserviamo che, per la continuità di f^{-1} , se $y \rightarrow 0$ allora $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(0) = 0$. Pertanto

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}.$$

A8. Una primitiva della funzione $\frac{\cos(7x)}{1 + \sin^2(7x)}$ è $\frac{1}{7} \arctan(\sin(7x))$. Dunque l'integrale vale $\pi/28$.

A9. Svolgendo i calcoli e ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$, si trova $\frac{z^2}{|z|^2} + \frac{|z|^2}{z^2} = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{(1+2i)^2 + (1-2i)^2}{5} = -\frac{6}{5}$.

A10. Osserviamo che per $n \rightarrow +\infty$

$$n^\alpha + n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cos\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \begin{cases} n^\alpha & \text{se } \alpha > 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

mentre il denominatore $\sim \frac{1}{n^{1/3}}$. La serie non converge se $\alpha \leq 0$. Per $\alpha > 0$, la serie converge se $\frac{1}{3} + \alpha > 1$, dunque $\alpha > 2/3$.

Parte B

- B1.** per il Teorema di Weierstrass.
- B2.** dal calcolo diretto.
- B3.** in quanto $\frac{f(x)g(x)}{x^{3/2}} \sim \frac{(\ln x)g(x)}{x^{1/2}} = x^{1/2} \ln x \frac{g(x) - g(0)}{x} \rightarrow 0 \cdot g'(0) = 0$, per $x \rightarrow 0^+$.
- B4.** in quanto $f(x) = -\sqrt{g(x)}$ e si applica il teorema di derivazione della funzione composta.
- B5.** dallo studio del grafico di f .
- B6.** dal teorema della permanenza del segno per funzioni.
- B7.** è la condizione necessaria di convergenza per una serie numerica.
- B8.** essendo f monotona, esistono finiti il limite destro e il limite sinistro in 0. In particolare il limite destro è ℓ , perché è il limite su una successione che tende a 0 da destra.
- B9.** per il teorema della permanenza del segno per successioni.
- B10.** per il teorema degli zeri f ammette almeno uno zero che è un punto di minimo assoluto per $|f|$.