Analisi Matematica 1 - 21/02/25 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola [ ] **Cognome** [ ] **Nome** [ ]

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1.* Determinare i punti di massimo assoluto x_1, x_2 e il massimo assoluto M di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{2|x|^3}{x^4+5}\right)$; $x_1, x_2 =$ [ ] $M =$ [ ]

A2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u''(t) + 12u'(t) + 36u(t) = 36t, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$

[ ]

A3.* Sia $f(x) = \sinh\left|\frac{2x}{x-4}\right|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Dire dove f è continua [ ] dove è derivabile e calcolare $f'(x)$ [ ]

[ ]

A4. Sia $w = 7e^{\frac{\pi}{4}i}$. Calcolare $\mathrm{Re}\left(\frac{w^2}{\overline{w}^3}\right)$. [ ]

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $\frac{1}{\overline{z}^6} = 7i$. [ ]

A5. Calcolare l'integrale: $\int_{-1}^{1} \cosh(8x)\,dx =$ [ ]

Calcolare l'integrale indefinito: $\int x^2 \cos(8x)\,dx =$ [ ]

A6. Determinare il valore di $\lim_{x\to 0} \frac{2x - \arctan(3x) + \sin x}{1 - e^{3x^3}}$. [ ]

A7. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \frac{\left(\cosh\left(\frac{2}{n^5}\right) - \cos\left(\frac{2}{n^5}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{3}{n}\right) - \sinh\left(\frac{3}{n}\right)\right)^2}{\ln\left(1 + \frac{3}{n^5}\right)}$? [ ]

A8. Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 della f centrato in $x_o = 2$.

[ ]

B1. * Sia $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x\right)$. Allora $\boxed{A}$ f è limitata nell'intervallo $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. $\boxed{B}$ $\exists x_o \in [0,1]$ in cui f si annulla. $\boxed{C}$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (-1, -1+\delta)$ risulta $f(x) < 0$. $\boxed{D}$ $\forall x \in (-1,1]$ risulta $f(x) \neq 0$.

B2. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, due volte derivabile con continuità in $\mathbb{R}$, sia $P_2(x;0) = 1 + x + x^2$ il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 0$. Allora $\boxed{A}$ $f'(1) = 2$. $\boxed{B}$ f è convessa in un intorno di $x_o = 0$. $\boxed{C}$ $f''(0) = 1$. $\boxed{D}$ $f(0) = 0$.

B3. Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n a_n = +\infty$. Allora: $\boxed{A}$ $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{B}$ Per ogni $M > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ vale $a_n > M$. $\boxed{C}$ Per ogni $M > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ vale $(-1)^n a_n > M$. $\boxed{D}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

B4. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 e $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $H(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,dt$. Allora:
$\boxed{A}$ H non è derivabile due volte. $\boxed{B}$ $H''(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{C}$ $H''(x) = f'(x)g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{D}$ Se $g(x)\cdot f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $H(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

B5. Sia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{e^{\sin^2 x}}$. Allora $\boxed{A}$ f è dispari. $\boxed{B}$ f è periodica. $\boxed{C}$ f è pari. $\boxed{D}$ f è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B6* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata prima continua. Supponiamo che $f'(x_o) \neq 0$. Allora $\boxed{A}$ x_o è un punto stazionario $\boxed{B}$ x_o è un punto di estremo. $\boxed{C}$ esiste un intorno di x_o in cui f è strettamente monotona. $\boxed{D}$ esiste un intorno di x_o in cui f è convessa.

B7. Sia $f(x) = \cosh(x^2), x \in \mathbb{R}$. Allora per $x \to 0$ $\boxed{A}$ $f(x) - 1 - \frac{1}{2}x^4 = o(x^8)$ $\boxed{B}$ $f(x) - 1 - \frac{1}{2}x^4 = o(x^{12})$ $\boxed{C}$ $f(x) - 1 - \frac{1}{2}x^4 = o(x^6)$ $\boxed{D}$ $f(x) - 1 - \frac{1}{2}x^4 = o(x^{10})$

B8. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie *assolutamente* convergente. Allora $\boxed{A}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ converge $\boxed{B}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_n$ converge $\boxed{C}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ converge $\boxed{D}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge