Analisi Matematica 1 - 20/06/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1⋆ Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u'(t)-(\tan t)u(t)=2\cos t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Trovare la soluzione del problema di Cauchy associato con condizione iniziale $u(0)=\frac{1}{2}$.

A2. Utilizzando una opportuna sostituzione, calcolare $I=\displaystyle\int_{\frac{e^{14}}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln(2x)-7}\right)^3 dx$.

A3. Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2n}\tanh(n)\left[1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{4\alpha}}{\sinh(2n)(2+\sin n)}$:

A4. Sia $f:[0,+\infty)\setminus\left\{\frac{1}{6}\right\}\to\mathbb{R}$, definita da $f(x)=\begin{cases}2, & \text{se } x=0,\\ 2+\dfrac{x}{\ln(6x)}, & \text{se } x>0,\ x\neq\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

Determinare **l'ascissa** x_m dove f assume il minimo locale.

Determinare **l'ascissa** x_M dove f assume il massimo locale.

A5. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0 di $f(x)=\sqrt{1+\ln(1+2x)}$.

A6. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\sin(6x)\cos(7x)e^{2x}$, nel punto di ascissa $x_0=\pi$.

A7. Trovare le radici terze in $\mathbb{C}$ di $w=2(1+i)$:

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2-|z|^2+Re(z)+2(Im(\overline{z}))^2+2\overline{z}=i+6$:

A8⋆ Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\tan(2x)\right)^{\frac{7}{\arcsin x}}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)!+2n\sin n-7}{n!(7n+1)^2+n^{14}\tanh(n^7)}$

B1. Sia f una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ il cui polinomio di Taylor centrato in x_0 di ordine 10 risulta $\sum_{k=0}^{9} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k!}$. Allora $f^{(6)}(x_0)$ (derivata di ordine 6 in x_0) è $\boxed{\text{A}}$ 6 $\boxed{\text{B}}$ 1/6 $\boxed{\text{C}}$ 1/6! $\boxed{\text{D}}$ 6!

B2*. Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali tale che $\forall\, n \geq 1$ risulta $a_{2n} \geq 2n$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{2n} = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

B3. Sia $f\colon (-1,1)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel suo dominio tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ Esiste finito $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. $\boxed{\text{B}}$ La funzione

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in (-1,1)\setminus\{0\}, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è continua in $x = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta \in (0,1)$ tale che per ogni $x \in (-\delta, 0)$ vale $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta \in (0,1)$ tale che per ogni $x \in (0,\delta)$ vale $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$.

B4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, e si consideri $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{f(x)}{1+[f(x)]^2}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to b} g(x) = \frac{1}{f(b)}$. $\boxed{\text{B}}$ g ha minimo assoluto in $[a,b]$, ma non ha massimo assoluto in $[a,b]$. $\boxed{\text{C}}$ g ha massimo e minimo assoluti in $[a,b]$. $\boxed{\text{D}}$ g ha massimo assoluto in $[a,b]$, ma non ha minimo assoluto in $[a,b]$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ g è derivabile in x_0 se $f(x_0) \neq 0$. $\boxed{\text{B}}$ g è derivabile in x_0 se $f'(x_0) \neq 0$. $\boxed{\text{C}}$ g è derivabile in x_0. $\boxed{\text{D}}$ g è derivabile in x_0 se $f(x_0) = 0$.

B6*. Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $F(x) = \int_{-1}^{x} \min\{t, 1\}\, dt$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ F è convessa in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ F è crescente. $\boxed{\text{C}}$ F è limitata. $\boxed{\text{D}}$ Esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che F non è derivabile in x_0.

B7. Siano $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$ e $h(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\frac{f(x)h(x)}{g(x)} = o(1)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $h(x)f(x) = o(g^2(x))$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x)/h(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{D}}$ $h(x)f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$.

B8. Si consideri la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n^2 + n\ln n}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n^2 + n\ln n}$. $\boxed{\text{B}}$ La serie converge semplicemente ma non assolutamente. $\boxed{\text{C}}$ La serie diverge. $\boxed{\text{D}}$ La serie converge assolutamente.