

A1★ Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} xy'(x) + 2y(x) = x^{-2} \\ y(e) = 7 \end{cases}$

A2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2^2 - x^2)^2$.

Determinare i punti stazionari di f .

Determinare i punti di massimo locale per f .

A3. Sia $f(x) = 2(\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{2x}$ per $x \in \mathbb{R}$. Sia f^{-1} la sua inversa. Calcolare $f^{-1}(2)$ e $(f^{-1})'(2)$.

A4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine due centrato in $x_0 = 2$ della funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{\frac{2-x}{x}}$.

A5. Sia $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x \frac{2-t}{6+t^2} dt$. Determinare l'ascissa x_0 dell'unico punto di flesso del grafico di F .

A6★ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} + 2\ln(1+x) - 1}{2x^2 - 2x^3}$.

A7★ Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z(z+3i) = 1$.

A8★ Utilizzando il Teorema di de l'Hôpital, calcolare $\lim_{x \rightarrow 2^+} \int_2^x \frac{\ln(\frac{t}{2})}{t-2} dt \Big/ \sin(x-2)$.

A9. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_0^{+\infty} (1+x^5)e^{\sin x} \arctan\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ converge in senso generalizzato.

A10. Stabilire se le seguenti serie: convergono, divergono (indicando se a $+\infty$ o a $-\infty$) oppure oscillano (i.e., non convergono e non divergono).

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 + \arctan(n)}{n^2 + n^{1/3}},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n + 4^n}{3^n + n},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}.$$

B1. Sia $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Allora ☐A 0 è un punto di minimo assoluto per f . ☐B f non ha punti di massimo locale. ☐C 0 è un punto di massimo assoluto per f . ☐D f non ha punti stazionari.

B2. Siano $f : [a, b] \cup [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, con $b < c$, continua in $[a, b] \cup [c, d]$. Allora ☐A $\nexists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. ☐B f ha minimo m e massimo M in $[a, b] \cup [c, d]$. ☐C $\exists x_o \in [a, b] \cup [c, d]$ t.c. $f(x_o) = 0$. ☐D f assume tutti valori compresi fra il minimo m e il massimo M .

B3. Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 1 + x$ se $x \in (1, 2]$. Allora ☐A L'inversa f^{-1} è crescente nel suo insieme di definizione. ☐B L'inversa f^{-1} è decrescente nel suo insieme di definizione. ☐C L'inversa f^{-1} è definita in tutto $[0, 3]$. ☐D L'inversa f^{-1} non è monotona nel suo insieme di definizione.

B4. Sia $P_2(x) = a + bx + cx^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ il polinomio di Mac-Laurin di f . Allora ☐A $c = f''(0)$. ☐B $b = f''(0)$. ☐C $a = \frac{1}{2}f''(0)$. ☐D $c = \frac{1}{2}f''(0)$.

B5* Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Allora ☐A $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in (0, 1)$ tale che $f(x_n) > n$. ☐B $\forall x \in (0, 1) f(x) > x$. ☐C $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in (0, 1)$ tale che $f(x_n) \leq n$. ☐D $\exists \bar{x} \in (0, 1)$ tale che $f(\bar{x}) < \bar{x}$.

B6. * Sia a_n una successione di numeri reali tali che $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Allora ☐A a_n è infinitesima. ☐B $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. ☐C a_n è decrescente. ☐D a_n è a termini positivi.

B7. Sia $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione integrabile e sia $c \in (a, b)$. Allora ☐A $\int_a^b f(x) dx < \int_a^c f(x) dx$. ☐B $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx$. ☐C $\int_a^b f(x) dx > \int_a^c f(x) dx$. ☐D $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^c f(x) dx$.

B8. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$. Allora $\text{Im} \left(|z| + \frac{1}{z} \right)$ è ☐A $\frac{1}{b}$ ☐B $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ ☐C $\frac{1}{ib}$ ☐D $\frac{b}{a^2 - b^2}$

B9. * Sia $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ e $f(b) > 0$. Allora ☐A esiste $x_0 \in (a, b)$ in cui $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(b)$. ☐B esiste $x_0 \in (a, b)$ in cui $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. ☐C esiste $x_0 \in (a, b)$ in cui $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(b)$. ☐D esiste $x_0 \in (a, b)$ in cui $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

B10* Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, convessa in $[a, b]$. Allora ☐A f' è decrescente in $[a, b]$. ☐B f è continua in (a, b) . ☐C f' è crescente in $[a, b]$. ☐D $\forall x \in [a, b] \text{ è } f''(x) \geq 0$.

Soluzioni della prova del 20/06/19

Parte A

- A1.** La soluzione del problema di Cauchy è definita in $(0, +\infty)$. Dopo aver diviso l'equazione per x , un fattore integrante è $e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$. Quindi l'equazione si riscrive nella forma $(x^2 y)' = x^{-1}$. Integrando e imponendo la condizione iniziale si trova $y = x^{-2}(\ln x + 7e^2 - 1)$.
- A2.** La derivata di f è $f'(x) = -2(2^2 - x^2)2x$. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -2$ oppure $x = 0$ oppure $x = 2$. I soli punti stazionari sono $-2, 0, 2$. f è derivabile su $\mathbb{R}$, pertanto i punti di massimo relativo sono da ricercare tra i punti stazionari. Studiando il segno di f' si vede che f' è negativa nell'intervallo $(-\infty, -2)$ e nell'intervallo $(0, 2)$ mentre è positiva nell'intervallo $(-2, 0)$ e nell'intervallo $(2, +\infty)$. Pertanto f è strettamente crescente nell'intervallo $(-2, 0)$ e nell'intervallo $(2, +\infty)$ ed è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -2)$ e nell'intervallo $(0, 2)$. Da questo studio della monotonia si ha che 0 è punto di massimo relativo, mentre -2 e 2 sono punti di minimo (assoluto). Pertanto l'unico punto di massimo relativo è 0 . Allo stesso risultato si poteva pervenire calcolando f'' e osservando che $f''(0) < 0$ e $f''(-2) = f''(2) > 0$.
- A3.** Si ha $f(0) = 2$ e quindi $f^{-1}(2) = 0$. Inoltre $f'(x) = 2xe^{2x} + 4(\frac{1}{2}x^2 + 1)e^{2x}$. Quindi $(f^{-1})'(2) = 1/f'(0) = 1/4$.
- A4.** Dalla teoria è noto che l'espressione del polinomio di Taylor di ordine 2 della f centrato in $x_0 = 2$ è $P_2(x; 2) = f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2}(x - 2)^2$. Riscrivendo la f come $f(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}$, è facile verificare che $f'(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$, $f''(x) = e^{-1}e^{\frac{2}{x}}\left(\frac{4}{x^4} + \frac{4}{x^3}\right)$, da cui ricaviamo $f(2) = 1$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$, $f''(2) = \frac{3}{4}$. Pertanto, concludiamo che $P_2(x; 2) = 1 - \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{3}{8}(x - 2)^2$.
- A5.** Osserviamo che F è derivabile con continuità infinite volte in $(0, +\infty)$. Cerchiamo i punti di flesso, studiando gli zeri ed il segno della derivata seconda di F . Dal Teorema Fondamentale del Calcolo, abbiamo $F'(x) = \frac{2-x}{6+x^2}$, $F''(x) = \frac{x^2-4x-6}{(6+x^2)^2}$. Pertanto, lo studio del segno della derivata seconda si riduce a risolvere $x^2 - 4x - 6 \geq 0$ nell'intervallo $(0, \infty)$. Troviamo che, in tale intervallo, la soluzione della disequazione è $x \geq 2 + \sqrt{10}$, e concludiamo, dunque, che l'unico punto di flesso cercato è $x_0 = 2 + \sqrt{10}$.
- A6.** Ricordando che $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)$, si ha $e^{\frac{1}{2}x^2-2x} \sim 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$. Essendo $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ il numeratore è asintotico a $\frac{3}{2}x^2$ mentre il denominatore è asintotico a $2x^2$, il limite è quindi uguale a $3/4$.
- A7.** Facendo i calcoli l'equazione diventa $z^2 + 3iz - 1 = 0$. Il discriminante è pari a -5 , le cui radici quadrate complesse sono $\pm\sqrt{5}i$. Con la formula risolutiva delle equazioni algebriche di secondo grado si trovano dunque le soluzioni $z_{1/2} = (-3i \pm \sqrt{5}i)/2$. Allo stesso risultato si poteva giungere sostituendo a z la forma algebrica e determinando parte reale e parte immaginaria.
- A8.** Osserviamo innanzi tutto che, per il comportamento asintotico della funzione seno in un intorno del punto dove il suo argomento si annulla, abbiamo $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\int_2^x \frac{\ln(\frac{t}{2})}{t-2} dt}{\sin(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\int_2^x \frac{\ln(\frac{t}{2})}{t-2} dt}{x-2}$. Applicando una prima volta il Teorema di de l'Hôpital, ci riduciamo a calcolare $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2}$. Utilizzando il medesimo teorema una seconda volta, abbiamo $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.
- A9.** La funzione integranda f è limitata in un intorno destro dell'origine e dunque risulta integrabile per ogni α . Per $x \rightarrow +\infty$, $f \sim x^{5-\alpha}$, se $\alpha > 0$, mentre $f(x) \sim x^5$, se $\alpha \leq 0$. Dunque $f(x)$ è integrabile a $+\infty$ se e solo se $\alpha - 5 > -1$, ossia $\alpha > 4$.

- A10.** Si ha $\frac{1 + \arctan(n)}{n^2 + n^{1/3}} \sim \frac{\pi/2}{n^2}$; per il criterio del confronto asintotico la serie converge. Inoltre $\frac{n + 4^n}{3^n + n} \sim (4/3)^n$; per il criterio del confronto asintotico la serie diverge. L'ultima serie converge per il criterio di Leibniz.
-

Parte B

- B1.** ☐ **C** f è strettamente crescente in $(-1, 0]$ ed è strettamente decrescente in $[0, 1)$, da cui 0 è punto di massimo assoluto per f .
- B2.** ☐ **B** f è continua in un insieme chiuso e limitato, quindi assume minimo m e massimo M per il Teorema di Weierstrass. Tuttavia, tale insieme non è un intervallo, per cui non possiamo garantire che la f assuma tutti i valori compresi tra il minimo m ed il massimo M .
- B3.** ☐ **A** Tracciandone il grafico, è facile vedere che f è monotona crescente e, dunque, anche la funzione inversa f^{-1} è monotona crescente nel suo insieme di definizione.
- B4.** ☐ **D** per definizione
- B5.** ☐ **A** definizione di limite con $M = n \in \mathbb{N}$.
- B6.** ☐ **A** dalla condizione necessaria di convergenza
- B7.** ☐ **D** in quanto $f \geq 0$
- B8.** ☐ **B** $|z|$ ha parte immaginaria nulla, mentre $1/z$ ha parte immaginaria pari a $-b/(a^2 + b^2)$.
- B9.** ☐ **D** per il teorema degli zeri.
- B10.** ☐ **B** La funzione è convessa, ma a priori non è dotata di derivata prima e seconda. Pertanto, possiamo unicamente concludere che f è continua in (a, b) . In generale, tutte le funzioni convesse in $[a, b]$ (intervallo chiuso), sono continue in (a, b) (intervallo aperto).