Analisi Matematica 1 - 19/07/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola | | **Cognome** | | **Nome** | |

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1.* Usando gli sviluppi notevoli, scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{1+2x}}$.

A2. Si consideri la funzione $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, **pari**, definita da $f(x) = 7|x|\sqrt{4^2 - x^2}$.

Determinare **il massimo assoluto** M della f.

Determinare **il minimo assoluto** m della f.

A3. Calcolare i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2x\cos x}{7\tan x - 7x}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \sin n + \ln(1 + \cos^2 n) + 7e^n}{\cosh(\frac{2}{n}) + 14\sinh(n)}$$

A4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 6\sin\Big(\ln(1+e^x)+6\arctan(x)-\ln 2\Big)$, nel punto di ascissa $x_0 = 0$:

A5.* Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' + 4u' + 4u = 0$.

Trovare una soluzione particolare dell'equazione $u'' + 4u' + 4u = e^{-2t} + e^{2t}$.

A6. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 = 8(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$ e scrivere le soluzioni in forma esponenziale:

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 + i\overline{z} - Im(z) = -8$:

A7. Risolvere **per parti** il seguente integrale definito $I = \displaystyle\int_6^8 (x-2)\ln(x-4)\,dx$.

A8. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\ln(1+\frac{2}{n})]^2}{\arctan(2n)[\sinh(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})]^\alpha}$:

B1. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $g(x) = o(e^x)$ per $x \to +\infty$ e $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)g(x)}{e^x} = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)g(x)}{e^{2x}} = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x} = +\infty$.

B2. * Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esista finito $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|}$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $x = x_0$ è un asintoto verticale per f. $\boxed{\text{B}}$ x_0 è un punto angoloso. $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile in x_0. $\boxed{\text{D}}$ f è continua in x_0.

B3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, continua in $(0, +\infty)$, e si consideri $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = e^{f(x)}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ g ha massimo assoluto in $(0, +\infty)$, ma non ha minimo assoluto in $(0, +\infty)$. $\boxed{\text{B}}$ $g \geq 0$ in $(0, +\infty)$. $\boxed{\text{C}}$ g ha massimo e minimo assoluti in $(0, +\infty)$. $\boxed{\text{D}}$ g ha minimo assoluto in $(0, +\infty)$, ma non ha massimo assoluto in $(0, +\infty)$.

B4. Sia $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ Esiste finito $\lim_{x\to1^-} f(x)$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{y\to0^+} f(\frac{1}{y}) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ Esiste $M > 0$ tale che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq M$. $\boxed{\text{D}}$ f è limitata in $(1, +\infty)$.

B5. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{\pi/4} + \ln n}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\nexists \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n^{\pi/4} + \ln n}$. $\boxed{\text{B}}$ La serie diverge. $\boxed{\text{C}}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{\text{D}}$ La serie converge semplicemente ma non assolutamente.

B6. * Sia $\{a_n\}$ la successione a valori reali definita $\forall n \geq 1$ da $a_n = \sin(n\frac{\pi}{2}) \sinh n$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

B7. Sia f una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora 0 è: $\boxed{\text{A}}$ un punto di flesso $\boxed{\text{B}}$ una cuspide $\boxed{\text{C}}$ un punto di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$ un punto di minimo assoluto

B8. Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $F(x) = \displaystyle\int_0^x |t|\, dt$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ Esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che F non è derivabile in x_0. $\boxed{\text{B}}$ F è crescente. $\boxed{\text{C}}$ F è convessa in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ F è limitata.