

① Si consideri l'integrale improprio dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\arctg x} + \sqrt[4]{x+10}}{(x-10)^{\alpha/4} + \ln^2(x+5)} dx$$

Determinare l'estremo inferiore degli α per cui l'integrale converge.

Posto

$$f(x) = \frac{e^{\arctg x} + \sqrt[4]{x+10}}{(x-10)^{\alpha/4} + \ln^2(x+5)}$$

cerchiamo il comportamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$

Osserviamo che, se $\alpha \leq 0$

$$f(x) \sim \frac{x^{1/4}}{\ln^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Dunque non può esserci convergenza dell'integrale improprio.

Se $\alpha > 0$

$$f(x) \sim \frac{x^{1/4}}{x^{\alpha/4}} = \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{4}}}$$

Afinché l'integrale improprio converga, deve essere

$$\frac{\alpha-1}{4} > 1 \quad \alpha > 5$$

Quindi l'estremo inferiore cercato è 5.

② Si consideri la funzione $f: (-8, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x+8} (\ln(x+8))^2 \quad x > -8$$

Indicati con x_m e x_M gli unici punti di minimo e di massimo locale per f , rispettivamente, calcolare

$$S = x_M + x_m - e^{-4}$$

Osserviamo che $f \geq 0$ in tutto $(-8, +\infty)$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -8} f(x) = 0$$

ma poiché il punto -8 non è compreso nell'insieme di definizione, si tratta di un punto che non dobbiamo considerare.

Calcoliamo la derivata prima. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \ln^2(x+8) + \sqrt{x+8} \frac{2 \ln(x+8)}{x+8}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+8}} \ln^2(x+8) + 2 \frac{\ln(x+8)}{\sqrt{x+8}}$$

$$= \frac{\ln(x+8)}{2\sqrt{x+8}} (\ln(x+8) + 4)$$

Abbiamo

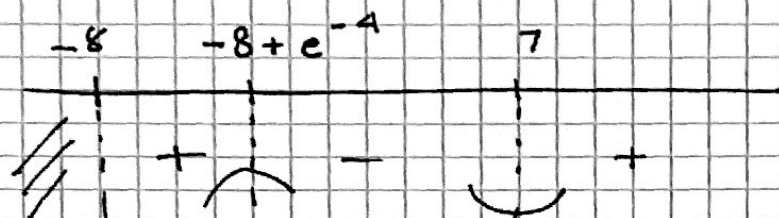
$$f'(x) = 0$$

$$\ln(x+8) [\ln(x+8) + 4] = 0$$

$$\ln(x+8) = 0 \quad x+8 = 1 \quad x = -7$$

$$\ln(x+8) + 4 = 0 \quad x+8 = e^{-4} \quad x = -8 + e^{-4}$$

Per quanto riguarda il segno di f' , abbiamo



Dunque

$$x_M = -8 + e^{-4}$$

$$x_m = -7$$

e concludiamo che

$$S = -8 + e^{-4} - 7 - e^{-4} = -15$$

③ Calcolare

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 [\sinh(2x) - \sin(2x)]}{x(x + \ln(1+x))^2}$$

Utilizziamo gli sviluppi asintotici. Abbiamo

$$\sinh(2x) = 2x + \frac{1}{3!} (2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 2x + \frac{8}{6} x^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{3!} (2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 2x - \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

Pertanto

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \left(\cancel{2x} + \frac{4}{3} x^3 - \cancel{2x} + \frac{4}{3} x^3 \right)}{x(x+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \cdot \frac{8}{3} x^3}{4x^3} = 8$$

④ Sia $f(x) = \arctg(4\sin^2 x)$

Posto $m = f'(\frac{\pi}{4})$, determinare $20m$

Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (4\sin^2 x)^2} \cdot 8\sin x \cos x$$

$$= \frac{1}{1 + 16\sin^4 x} \cdot 8\sin x \cos x$$

Pertanto

$$m = f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2}}{1 + 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \frac{4}{1 + 16 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$20m = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$$

⑤ Sia Z l'insieme delle radici in campo complesso dell'equazione

$$(z - 7 - 4i)^4 + 4 = 0$$

Determinare il valore massimo assunto dalla funzione

$\operatorname{Re}(z)$ sull'insieme Z

Calcoliamo le radici

$$(z - 7 - 4i)^4 + 4 = 0$$

$$z - 7 - 4i = \sqrt[4]{-4}$$

$$z = 7 + 4i + \sqrt[4]{-4}$$

Abbiamo

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right), k=0,1,2,3$$

Indicate con w_k le 4 radici, abbiamo

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1+i$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1+i$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1-i$$

$$w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1-i$$

Quindi

$$z_0 = 7+4i + 1+i = 8+5i, \quad \operatorname{Re}(z_0)=8$$

$$z_1 = 7+4i - 1+i = 6+5i, \quad \operatorname{Re}(z_1)=6$$

$$z_2 = 7+4i - 1-i = 6+3i, \quad \operatorname{Re}(z_2)=6$$

$$z_3 = 7+4i + 1-i = 8+3i, \quad \operatorname{Re}(z_3)=8$$

Quindi il massimo cercato è 8.

⑥ Sia

$$A = \int_0^2 \frac{4^x}{4^x + 10} dx$$

Calcolare il 4^x

Abbiamo

$$\int_0^2 \frac{4^x}{4^x + 10} = \left[\ln(4^x + 10) \cdot \log_4 e \right]_0^2$$

$$= \log_4 e [\ln 26 - \ln 11] = \log_4 e \ln \frac{26}{11}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} 11 \cdot 4^{\Delta} &= 11 \cdot 4^{\log_4 e \ln \frac{26}{11}} \\ &= 11 \left(4^{\log_4 e} \right)^{\ln(26/11)} \\ &= 11 e^{\ln 26/11} = 11 \cdot \frac{26}{11} = 26 \end{aligned}$$

- ⑦ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 . Sia $P(x)$ il suo polinomio di Taylor/McLaurin centrato in $x=0$ di ordine 2. Allora

$$f(x) - P(x) = o(x^2)$$

Infatti, se scriviamo la formula di Taylor con il resto di Peano, abbiamo

$$f(x) = P_2(x; 0) + o(x^2)$$

da cui proprio

$$f(x) - P_2(x; 0) = o(x^2)$$

- ⑧ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva e si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$F(0) \leq F(2)$$

Infatti

$$F(0) = \int_1^0 f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt < 0$$

perché f è positiva

$$F(2) = \int_1^2 f(t) dt > 0$$

⑨ Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e tale che $f(a) = f(b) = 0$

Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$

In fatti f è continua in un insieme chiuso e limitato (è un intervallo $[a, b]$) e per il Teorema di Weierstrass ha in tale insieme massimo e minimo.

⑩ Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

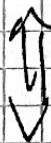
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Allora

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ abbiamo $a_n > 0$

È una conseguenza diretta della definizione di limite. In fatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$



$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} > \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ risulta $a_n > M$

Poiché $M > 0$, concludiamo

⑪ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x_0) = 0$

Se $\nexists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x_0) = 0$, essendo f derivabile in tutto $\mathbb{R}$, concluderemmo che $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) > 0$ oppure $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) < 0$

In entrambi i casi, f sarebbe monotona e non potrebbe avere a $\pm\infty$ lo stesso limite.

(12) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, la cui derivata non si annulla in alcun punto di $[a, b]$. Allora f è iniettiva.

Infatti, se f' non si annulla mai, abbiamo in tutta $[a, b]$ $f' > 0$ oppure $f' < 0$. In entrambi i casi, f è monotona in $[a, b]$. Dalla monotonia segue immediatamente che f è iniettiva.