

① Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right) + 4x, \quad x \geq 0$$

Sia g l'inversa di f . Calcolare $\frac{1}{g'(-\pi/4)}$

Osserviamo che se $x=0$ è

$$f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$$

Pertanto

$$f(0) = -\pi/4 \Rightarrow g(-\pi/4) = 0$$

Inoltre

$$g'(-\pi/4) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$\frac{1}{g'(-\pi/4)} = f'(0)$$

Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)^2} \left[+ \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right] + 4$$

$$f'(0) = 4$$

e concludiamo che $\frac{1}{g'(-\pi/4)} = 4$

2) Sia $I = \int_0^7 \ln\left(\frac{7}{x+7}\right)^2 dx$

Calcolare $I + 7 \ln 16$

Per le proprietà dei logaritmi osserviamo che

$$I = 2 \int_0^7 \ln\left(\frac{7}{x+7}\right) dx = 2 \int_0^7 \ln 7 dx - 2 \int_0^7 \ln(x+7) dx$$

Perciò, integrando per parti,

$$I = 2(\ln 7) \cdot 7 - 2(x+7) \ln(x+7) \Big|_0^7 + 2 \int_0^7 \frac{x+7}{x+7} dx$$

$$= 14 \ln 7 - 28 \ln 14 + 14 \ln 7 + 14$$

$$= \cancel{28 \ln 7} - \cancel{28 \ln 7} - 28 \ln 2 + 14$$

$$= -4 \cdot 7 \ln 2 + 14 = -7 \ln 2^4 + 14 = -7 \ln 16 + 14$$

Pertanto

$$I + 7 \ln 16 = \cancel{-7 \ln 16} + 14 + \cancel{7 \ln 16} = 14$$

③ Si consideri l'equazione in campo complesso

$$(z-8)^6 = 64$$

Dette $z_0, z_1, \dots, z_5$ le sue radici, calcolare $\sum_{k=0}^5 z_k$

Abbiamo

$$(z-8)^6 = 64$$

$$z-8 = \sqrt[6]{64}$$

$$z = 8 + \sqrt[6]{64}$$

dove $\sqrt[6]{64}$ va calcolata in senso complesso. Poiché

$$64 = 2^6 [\cos 0 + i \sin 0]$$

abbiamo

$$z_k = 2 \left[\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right] + 8 \quad k=0, \dots, 5$$

Di conseguenza

$$Z_0 = 8 + 2 (\cos 0 + i \sin 0) = 2 + 8$$

$$Z_1 = 8 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8 + 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3} + 8$$

$$Z_2 = 8 + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 8 + 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} + 8$$

$$Z_3 = 8 + 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = 8 + (-2) = -2 + 8$$

$$Z_4 = 8 + 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 8 + 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 - 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_5 = 8 + 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 8 + 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 + 1 - i\sqrt{3}$$

Tandochiamo

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 = 6 \cdot 8 = 48$$

④ Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0, 7) \\ \frac{e^7}{\sqrt{7}} - x + 7 & \text{se } x \in [7, +\infty) \end{cases}$$

Siano x_1 e x_2 i due punti di estremo di f . Calcolare $7(x_1 + x_2)$

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^7}{\sqrt{7}} - x + 7 \right) = -\infty$$

$$f(7) = \frac{e^7}{\sqrt{7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^7}{\sqrt{7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \left(\frac{e^7}{\sqrt{7}} - x + 7 \right) = \frac{e^7}{\sqrt{7}}$$

La funzione è, dunque, continua in $(0, +\infty)$

Inoltre,

$$x > 7 \quad f'(x) = -1 \Rightarrow f \text{ è monotona decrescente in } [7, +\infty)$$

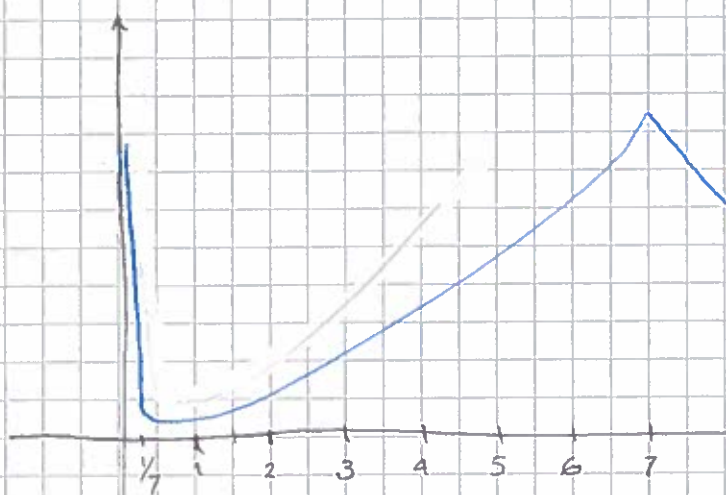
$$0 < x < 7 \quad f'(x) = \frac{e^{\sqrt{7x}} \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{7x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{7x}}}{2\sqrt{x} \cdot x} [\sqrt{7}\sqrt{x} - 1]$$

Quindi

$$0 < x < \frac{1}{7} \quad f'(x) < 0$$

$$\frac{1}{7} < x < 7 \quad f'(x) > 0$$

Il grafico è quello in figura sotto. Ricaviamo facilmente che



$$x_1 = \frac{1}{7} \quad (\text{punto di minimo})$$

$$x_2 = 7 \quad (\text{punto di massimo})$$

Pertanto

$$7(x_1 + x_2) = 7\left(\frac{1}{7} + 7\right) = 1 + 49 = 50$$

⑤ Si consideri la serie dipendente dal parametro reale a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{13-a}} + \frac{n^5}{n^a + 5} \right)$$

Detto $\Delta \subset \mathbb{R}$ l'intervallo dei parametri $a \in \mathbb{R}$ per cui la serie

converge, calcolare la lunghezza di Δ .

Possiamo suddividere la serie data in due serie parziali

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{13-a}}$$

Per il criterio di Leibnitz converge se

$$13-a > 0 \Rightarrow \underline{a < 13}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^a + 5}$$

$$\text{Abbiamo per } n \gg 1 \quad \frac{n^5}{n^a + 5} \sim \frac{1}{n^{a-5}}$$

e per il criterio dell'asintotico, c'è convergenza se

$$a-5 > 1 \Rightarrow \underline{a > 6}$$

Pertanto $\Delta = (6, 13)$ e la sua lunghezza è $13-6=7$

⑥ Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2(e^{6x}-1)}{2x - \sin(2x)}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2(e^{6x}-1)}{2x - \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2(\sqrt{1+6x} - 1)}{2x - (2x - \frac{1}{6}(2x)^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{48x^3}{\frac{8}{6}x^3} = \frac{48}{8/6} = 36 \end{aligned}$$

⑦ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte, il cui sviluppo di Taylor/Maclaurin centrato in $x=0$ di ordine sette è dato da $f(x) = 2x^5 + 3x^7 + o(x^7)$

Il polinomio di Maclaurin di ordine sette è

$$P_7(x; 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 +$$

$$+ \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!} x^7$$

Poiché nel nostro caso è

$$P_7(x; 0) = 2x^5 + 3x^7$$

$$f(x) = P_7(x; 0) + o(x^7)$$

è chiaro che

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 2 \Rightarrow f^{(5)}(0) = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

Quindi $f^{(5)}(0) = 240$, cioè la risposta d)

⑧ Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali positivi

Poiché $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono positivi, vale la proprietà

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

ossia la risposta d)

⑨ Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, con L finito e $L > 0$.

Dalla definizione di limite,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x > K \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Se scegliamo $\epsilon = L/2$, concludiamo che in corrispondenza si ha

$$\exists K > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x > K \quad f(x) > L/2$$

ossia la risposta a)

⑩ Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile che assume minimo assoluto in 0 e massimo assoluto in 1

Se il minimo assoluto è assunto in $x=0$ e il massimo

assoluto in $x=1$, per definizione abbiamo

$\exists (0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in (0, \varepsilon)$ $f(x) \geq f(0)$. Poiché f è derivabile, dalla definizione di derivata ^(ne) segue che esiste almeno un punto in $(0, \varepsilon)$ in cui $f' \geq 0$, ossia la risposta d)

(11) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Per il Teorema fondamentale del Calcolo risulta

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se, dunque, $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ossia F è decrescente, cioè la risposta d)

(12) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di minimo assoluto per f

Poiché il minimo assoluto è interno e f è derivabile, necessariamente il punto è anche di minimo locale e $f'(x_0) = 0$, ossia la risposta c)