Analisi Matematica 1 - 17/06/25 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola [ ] **Cognome** [ ] **Nome** [ ]

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u'(t) - (3t^2+1)u(t) = 6(3t^2+1), \\ u(0) = 0. \end{cases}$

[ ]

A2. Determinare il valore dei seguenti limiti:

$L_1 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\tan\frac{2}{n} - \tanh\frac{2}{n}}{\sin\frac{5}{n^3}}$ [ ], $L_2 = \lim_{x\to 0} (1+\tan(2x))^{\frac{1}{\sin(7x)}}$ [ ].

A3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = (x^2+4)e^{-x+7}$. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 0$.

[ ]

A4.* Sia $f(x) = \min\{5, |\log_5(x-2)|\}$ per $x > 2$. Determinare il massimo M e il minimo m assoluti di f, $M =$ [ ] $m =$ [ ] e i punti dove vengono raggiunti [ ].

A5.* Calcolare l'integrale indefinito: $\displaystyle\int \frac{\ln(8x)}{(1+2x)^2}\,dx =$

[ ]

A6. Sia $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log_2(1+x)}{x}, & x > 0 \\ a\cosh x, & x < 0. \end{cases}$. Per quale valore di a f si prolunga con continuità in 0? [ ] Calcolare derivata destra e sinistra in 0 del prolungamento ottenuto.

[ ]

A7. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(iz)^3 = 7^3(i+1)$. [ ]

A8. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tan\frac{1}{n^{3/2}}\right)\left(e^{4\cdot n^{-1/2}} - 1\right)}{n^\alpha}$? [ ]

B1. * Sia (a_n) una successione di numeri reali negativi tale che $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n) = -5$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ Non esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. $\boxed{\text{C}}$ (a_n) è monotona. $\boxed{\text{D}}$ (a_n) è convergente.

B2. * Sia $f : [-1,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}-\arctan x} - \dfrac{4}{\pi}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\exists\delta > 0$ tale che $\forall x \in (0,\delta)$ risulta $f(x) < 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall x \in [-1,1)$ risulta $f(x) \neq 0$. $\boxed{\text{C}}$ f è limitata nell'intervallo $[-1,1)$. $\boxed{\text{D}}$ f è limitata nell'intervallo $[-1,0)$.

B3. Sia $f : [0,3) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{3-x}\right)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è convessa in $[0,3)$. $\boxed{\text{B}}$ f è pari. $\boxed{\text{C}}$ f è strettamente decrescente in $[0,3)$. $\boxed{\text{D}}$ f è concava in $[0,3)$.

B4. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, due volte derivabile con continuità in $\mathbb{R}$, sia $P_2(x;0) = 1 + 2x - 4x^2$ il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 della f centrato in $x_o = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f'(1) = -6$. $\boxed{\text{B}}$ $f(0) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f''(0) = -4$. $\boxed{\text{D}}$ f è concava in un intorno di $x_o = 0$.

B5. Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $(FG)''(x) = f'(x)g(x) + 2f(x)g(x) + F(x)g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ $(FG)''(x) = f'(x)G(x) + 2f(x)g(x) + F(x)g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{C}}$ $(FG)''(x) = f'(x)g(x) + 2f(x)g(x) + f(x)g'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ F'' non è continua.

B6. Siano $f(x) = o(x)$, $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(x) + g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) - g(x) = o(x)$ per $x \to 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x) - g(x) = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $f(x) - g(x) \sim x$ per $x \to 0$.

B7. Sia (a_n) una successione di numeri reali tali che $0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n$ per ogni n. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \log_2(a_n)$ converge $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(a_n)$ converge $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

B8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $a < b$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{1}{b-a}\ln\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right) = \dfrac{f'(c)}{f(c)}$. $\boxed{\text{B}}$ $(b-a)\ln\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right) = \dfrac{f'(c)}{f(c)}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(c)}{f(c)}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{b-a}\dfrac{\ln f(b)}{\ln f(a)} = \dfrac{f'(c)}{f(c)}$.