Analisi Matematica 1 - 12/09/24 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ______ **Cognome** ______ **Nome** ______

Ing. Elettronica e Informatica □ **Bioingegneria** □ **Ing. Industriale** □

A1.* Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+7^n}}{\left(1+\arctan(\frac{2}{n})\right)^n}$ ______

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\cos x}{7x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)} + 4x\arctan(e^x\ln|x|)$ ______

A2. Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(n)[\tanh(\frac{1}{n})]^{8\alpha}}{\sinh(n)[(1+\frac{8}{n})^8-1]^\alpha}$: ______

A3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 6\ln\Big(\sin(6x)+\arctan(e^x)-\arctan 1+6e^x\Big)$, nel punto di ascissa $x_0 = 0$:

______

A4. Scrivere il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = 7x^2 + \ln\left(\frac{1}{2+x^2}\right)$.

______

A5. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $(z-2)^2 - 2i = 0$ e scrivere le soluzioni in forma esponenziale:

______

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2+2iz+4=0$:

______

A6. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} (\sin t)y' = (\cos t)y + 7\sin^4 t \\ y(\pi/2) = 7\pi \end{cases}$

______

A7.* Sia data la funzione $f : \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \arcsin(2x) - \sqrt{2^2x^2-\frac{1}{4}} + \frac{2\pi}{5}$.

Determinare **l'ascissa** x_m del minimo assoluto della f. ______

Determinare **il minimo assoluto** m della f. ______

A8. Risolvere **con opportuna sostituzione** il seguente integrale definito $I = \int_{2^{10}}^{2^{20}} \frac{\sqrt{\log_2 x - 2}}{x}\,dx$.

______

B1.* Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ e sia $P_2(x,4) = x^2+4x+6$ il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0 = 4$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ f è concava in un intorno di $x_0 = 4$. $\boxed{\text{B}}$ $f''(4) = 4$. $\boxed{\text{C}}$ $f(4) > f'(4)$. $\boxed{\text{D}}$ $f \leq 0$ in un intorno di $x_0 = 4$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$, e si consideri $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sin(f(x))$. Allora $\boxed{\text{A}}$ g ha massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ g è dispari. $\boxed{\text{C}}$ g è continua ma non è limitata in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ g è continua e limitata in $\mathbb{R}$.

B3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 = 0$ con $f(0)g(0) = 0$. Allora $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x}$ è: $\boxed{\text{A}}$ $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(0)g'(0)$. $\boxed{\text{C}}$ $f(0)g'(0)$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(0)g(0)$.

B4. Sia $\{a_n\}$ la successione a valori reali definita $\forall\, n \geq 1$ da $a_n = n + \cos(n\pi) \cdot \sin(n)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = (-1)^n$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

B5.* Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt$. Allora esiste $c \in]-1,1[$ tale che : $\boxed{\text{A}}$ $F(1) = f(c)$ $\boxed{\text{B}}$ $F(c) = f(1)$ $\boxed{\text{C}}$ $F(c) = 2f(1)$ $\boxed{\text{D}}$ $F(1) = 2f(c)$

B6. Sia (a_n) una successione a valori reali tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente. Allora,

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^6$ è divergente a $+\infty$. $\boxed{\text{B}}$ (a_n) è decrescente. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^8$ è convergente. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^{1/2}$ è convergente.

B7. Sia $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che $f(1) < f(4)$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ $\exists \xi \in (1,4)$ tale che $f'(\xi) > 0$. $\boxed{\text{B}}$ f è crescente in un intorno sinistro di $x_0 = 4$. $\boxed{\text{C}}$ f è crescente in $[1,4]$. $\boxed{\text{D}}$ f è crescente in un intorno destro di $x_0 = 1$.

B8. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\sin n + n^{e/5}}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ La serie diverge. $\boxed{\text{B}}$ La serie converge semplicemente ma non assolutamente. $\boxed{\text{C}}$ La serie converge assolutamente. $\boxed{\text{D}}$ $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\sin n + n^{e/5}}$.