

A1. Determinare per quali $\alpha > 0$ converge la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{2}{n^\alpha})}{\sin(\frac{2}{n^{1/2}})}$.

A2. Calcolare il valore del limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \sin(\frac{1}{n^2}) - \cos(\frac{2}{n^2})}{e^{6/n^4} - 1}$.

A3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \ln\left(\frac{x^4 + 1}{x^4}\right) + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 3 \cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right) \right]$

A4.* Data $f(x) = \log_2(1 + 2x) + x$ con $x \in [0, +\infty)$ e denotata con g la sua inversa, calcolare la derivata di g nel punto $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy per $x > 0$

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x^2}y + \frac{5}{x^2} \\ y(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

A6* Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = x^3 \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

A7* Scrivere il polinomio di Taylor/Mac Laurin di ordine 2 centrato in 1 della funzione

$$f(x) = \ln(4 + x).$$

A8* Calcolare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^6 + i 4 z^4 = 0$.

A9. Calcolare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + 7 = \lambda$.

A10* Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale risulta convergente

$$\int_0^2 \frac{e^{-2x} \sin^2 x}{(e^{7x} - 1)^\alpha} dx$$

B1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(-1) = -1$ e $f(-2) = -2$. A Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n$. B Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 1$. C Per ogni $x \in [-2, -1]$ $f(x) < 0$. D f ha un massimo locale in $x = -1$.

B2.* Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-x^2}$. Sia $M_n = \max_{x \in [0, n]} f(x)$. Allora (M_n) è una successione A infinitesima B costante C indeterminata D infinita

B3. * Sia $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = L \neq 0$, finito. Allora A anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste finito. B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. C $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $||a_n| - L| < \epsilon$. D $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $a_n > L$.

B4.* Sia $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergente. Allora A $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. B $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. C $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$ risulta $a_n > 0$. D converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

B5. Sia $f(x) \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$. A $f(x)(1 + \sin x) \sim f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$. B $f(x) = o(xe^{1/x})$ per $x \rightarrow +\infty$. C $e^{f(x)} \sim e^x$ per $x \rightarrow +\infty$. D $f^2(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$.

B6.* Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continua in (a, b) , tale che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$. Allora A $\forall x \in (a, b)$ risulta $f(x) > 0$. B $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$. C $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. D la funzione f assume minimo in (a, b) .

B7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata tale che $f(0) = 0$. A $(\sup_{\mathbb{R}} f) \cdot (\inf_{\mathbb{R}} f) \leq 0$. B f assume sia valori strettamente positivi sia valori strettamente negativi. C f assume massimo e minimo in $\mathbb{R}$. D Se f non assume massimo allora $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$. Allora A $\int_{-\infty}^0 |f(x)| dx$ converge. B $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge. C $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. D $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge.

B9. Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni convesse e derivabili due volte. Allora A $f \circ g$ è convessa, se g è crescente. B $f \circ g$ è convessa. C $f \circ g$ è crescente. D $f \circ g$ è convessa, se f è crescente.

B10.* Sia $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. Allora un argomento di z^{10} è A $\frac{\pi}{3}$ B $\frac{4}{3}\pi$ C $\frac{2}{3}\pi$ D $\frac{5}{3}\pi$

Soluzioni della prova del 12/02/20

Parte A

A1. Grazie alle stime asintotiche notevoli, il termine generale della serie è asintotico a $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ per $n \rightarrow +\infty$. La serie $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ converge se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, ossia per $\alpha > \frac{3}{2}$. Per il criterio del confronto asintotico anche la serie data converge per $\alpha > \frac{3}{2}$.

A2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x} \sin x - \cos(2x)$ ammette il seguente sviluppo per $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) \right) = 1 - \frac{1}{6}x^2 - 1 + 2x^2 + o(x^2) = \frac{11}{6}x^2 + o(x^2)$$

Per $x = \frac{1}{n^2}$ si ha $n^2 \sin \frac{1}{n^2} - \cos \left(\frac{2}{n^2} \right) \sim \frac{11}{6} \frac{1}{n^4}$, per $n \rightarrow +\infty$. Al denominatore invece:

$$e^{6/n^4} - 1 \sim \frac{6}{n^4}$$

per $n \rightarrow +\infty$. Pertanto il limite precedente è pari a $\frac{11}{36}$.

A3. Dalle stime asintotiche per le funzioni elementari si ha

$$\begin{aligned} x^3 \ln \left(\frac{x^4 + 1}{x^4} \right) &= x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^4} \right) \sim x^3 \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x} \\ x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) &\sim x \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}$$

per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto il limite richiesto è $0 + 1 + 3 = 4$.

A4. Dal teorema di derivazione della funzione inversa risulta $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, con $y_0 = f(x_0)$.

Con i dati del problema $y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \log_2 e$. Pertanto $g'\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{1 + \log_2 e}$.

A5. Dalla formula risolutiva per la soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine si ha

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_1^x e^{A(t)} \frac{5}{t^2} dt,$$

con $A(x) = \int_1^x -\frac{2}{t^2} dt = \frac{2}{x} - 2$. Sviluppando i calcoli

$$\int_1^x e^{\frac{2}{t}-2} \frac{5}{t^2} dt = 5e^{-2} \int_1^x e^{\frac{2}{t}} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{5}{2}e^{-2} \left[e^{\frac{2}{t}} \right]_1^x = -\frac{5}{2}e^{\frac{2}{x}-2} + \frac{5}{2}.$$

La soluzione è pertanto $y(x) = 5e^{-\frac{2}{x}+2} - \frac{5}{2}$.

A6. Con il cambio di variabile $x^2 = t$, $2x dx = dt$ si ha

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^2) dx &= \int x^2 \cos(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int t \cos(t) dt = \frac{1}{2} \left(t \sin t - \int \sin t dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (t \sin t + \cos t) = \frac{1}{2} (x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)).\end{aligned}$$

A7. Dai calcoli diretti, risulta $f(1) = \ln 5$, $f'(1) = \frac{1}{5}$, $f''(1) = -\frac{1}{25}$, da cui il polinomio richiesto è $f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = \ln 5 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{1}{50}(x-1)^2$.

A8. L'equazione si riscrive come $z^4(z^2 + 4i) = 0$, che ammette la soluzione nulla e le soluzioni di $z^2 + 4i = 0$, ossia $z^2 = -4i$, che sono date da $\pm(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

A9. L'equazione assegnata si riscrive come $\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) = (\lambda-7)\pi/2$. Il numero di soluzioni corrisponde al numero di intersezioni tra il grafico di $\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)$ e la retta orizzontale $y = (\lambda-7)\pi/2$. Si trova dunque 1 soluzione se $(\lambda-7)\pi/2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ e nessuna soluzione negli altri casi; pertanto una soluzione se $6 \leq \lambda \leq 8$ e $\lambda \neq \frac{15}{2}$, nessuna negli altri casi.

A10. Occorre studiare l'integrabilità della funzione $f(x) = \frac{e^{-2x} \sin^2 x}{(e^{7x} - 1)^\alpha}$ vicino a 0. A tal proposito basta osservare che $f(x) \sim \frac{x^2}{(7x)^\alpha} = \frac{1}{7^\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ per $x \rightarrow 0^+$ e che $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$ è integrabile vicino a 0 se $\alpha - 2 < 1$, ossia per $\alpha < 3$. Per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato converge per $\alpha < 3$.

Parte B

- B1.** B per il Teorema di Lagrange.
- B2.** B dal calcolo diretto si trova che $M_n = f(0) = 1$ per ogni n .
- B3.** C definizione di limite.
- B4.** D per il criterio della convergenza assoluta per serie.
- B5.** D dalle proprietà della relazione $\sim$.
- B6.** D scegliamo $x_0 \in (a, b)$ con $f(x_0) > 0$ e con la definizione di limite con $M = f(x_0)$ troviamo un intorno destro di a , $(a, a + \delta)$ e un intorno sinistro di b , $(b - \delta, b)$ in cui $f > f(x_0)$. Per il teorema di Weierstrass, esiste $x_1 \in [a + \delta, b - \delta]$ tale che $f(x) \geq f(x_1)$ per ogni $x \in [a + \delta, b - \delta]$. Sia $\bar{x}$ il punto tra x_0 e x_1 in cui f assume il valore più piccolo. Allora $\bar{x}$ è punto di minimo in tutto (a, b) .
- B7.** A Per le proprietà di estremo superiore ed estremo inferiore $\sup_{\mathbb{R}} f \geq f(0) = 0$ e $\inf_{\mathbb{R}} f \leq f(0) = 0$.
- B8.** C Dalla definizione di limite si ha che $x^2|f(x)| \leq 1$ definitivamente per $x \rightarrow +\infty$, ossia $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Per il criterio del confronto, essendo $\frac{1}{x^2}$ integrabile all'infinito, anche $|f(x)|$ lo è.
- B9.** D $[f(g(x))]'' = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x) \geq 0$, essendo $f'', g'', f' \geq 0$.
- B10.** A un argomento di z è $-\pi/6$. Un argomento di z^{10} è $-\frac{10}{6}\pi = -\frac{5}{3}\pi$ che differisce da $\frac{\pi}{3}$ per un multiplo di 2π .