Analisi Matematica 1 - 11/09/25 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola ☐ **Cognome** ☐ **Nome** ☐

Ing. Elettronica e Informatica ☐ **Bioingegneria** ☐ **Ing. Industriale** ☐

A1. Trovare tutte le soluzioni (ovvero l'integrale generale) dell'equazione differenziale $2u''(t) + 8u'(t) + 6u(t) = 2(t+1)$.

A2.* Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^8 = \left(\dfrac{3+3i}{2-2i}\right)^{16}$.

A3. Sia $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)$. Determinare i punti stazionari di f ☐ gli estremi assoluti di f ☐ e i punti di estremo ☐.

A4. Utilizzando noti sviluppi di Taylor/Mc-Laurin, scrivere in $[0, +\infty)$ il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 2 centrato in $x_o = 0$ della funzione $f(x) = \cos(2\sqrt{x})\cosh(3\sqrt{x})$.

A5. Sia $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{7x^2}{x^2+2}\right)}{x}$ per $x \neq 0$. Dopo aver prolungato f con continuità in 0, calcolare $f'(0)$ ☐. Posto $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ e $h(x) = g(f(x))$, calcolare $h'(0)$. ☐

A6. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\left(e^{n^{-\alpha}}-1\right)}{n^{\frac{1}{13}} + \sin(e^{\alpha n})}$? Risulta ☐.

A7.* Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2\left(e^{-7\sin x} - \alpha\right)x^2$. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$? Risulta ☐. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$? Risulta ☐.

A8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\sin(8x)\,dx =$

B1. Sia (a_n) una successione di numeri reali divergente a $+\infty$. Allora: $\boxed{\text{A}}$ $\forall\, M > 0$ vale $a_n \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall\, M > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n}$, vale $a_n < M$. $\boxed{\text{C}}$ $\forall\, M > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n}$, vale $(-1)^n a_n > M$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall\, M > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n}$, vale $-a_n \leq -M$.

B2. Sia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sinh \dfrac{1}{x^2}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\boxed{\text{B}}$ f è limitata. $\boxed{\text{C}}$ f è dispari. $\boxed{\text{D}}$ In $(-\infty, 0)$ f è monotona crescente.

B3.* Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\, dt$. Allora:
$\boxed{\text{A}}$ F è monotona. $\boxed{\text{B}}$ F ha un punto di non derivabilità. $\boxed{\text{C}}$ 0 è un punto stazionario per F. $\boxed{\text{D}}$ F' ha infiniti zeri.

B4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2 - \tanh x$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ Esiste unico $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_o) = \pi$. $\boxed{\text{C}}$ f assume il valore $\sqrt{3}$ almeno due volte. $\boxed{\text{D}}$ Esiste unico $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_o) = \sqrt{3}$.

B5.* Siano (a_n), (b_n) due successioni tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $a_n - b_n \to 0$ $\boxed{\text{B}}$ (a_n) e (b_n) ammettono limite e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. $\boxed{\text{C}}$ $a_n - b_n \to 1$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n - b_n = o(b_n)$, per $n \to +\infty$.

B6. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tre volte derivabile con continuità in $\mathbb{R}$, sia $P_3(x; 0) = 1 + x + x^2 + x^3$ il polinomio di Taylor/Mc-Laurin di ordine 3 della f centrato in $x_o = 0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $f(1) = 4$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(1) = 6$. $\boxed{\text{C}}$ $f'''(0) = 3$. $\boxed{\text{D}}$ $f'''(0) = 6$.

B7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora $\boxed{\text{A}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(x) \leq f(c)$, per ogni $x \in [a, b]$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(x) \geq f(c)$, per ogni $x \in [a, b]$. $\boxed{\text{C}}$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, per ogni $x \in [a, b]$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

B8. Sia (a_n) una successione numerica tale che $|a_n| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$, definitivamente. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
$\boxed{\text{A}}$ converge se $\alpha > 1$ $\boxed{\text{B}}$ converge se $\alpha \geq 1$ $\boxed{\text{C}}$ diverge se $\alpha \leq 1$ $\boxed{\text{D}}$ converge se $\alpha < 1$