
Analisi Matematica 1 - 11/02/26 - Tempo a disposizione: 2h e 30 minuti

Matricola

Cognome

Nome

Ing. Elettronica e Informatica ☐**Bioingegneria** ☐**Ing. Industriale** ☐

A1.* Sia $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{\sinh(3x^4) + \ln(1 + 3x)}{2 \cos(x)} + \frac{2 \cosh(x^4)}{e^{1+x^2} - \sin(x^2)}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = \alpha$. Determinare il parametro α in modo tale che la funzione sia continua in $[0, 1)$.

Calcolare la derivata destra in $x_0 = 0$.

A2. Data $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 7x^2 \left[\ln \frac{2}{x} \right]^2$ se $0 < x \leq 2$ e $f(0) = 0$, determinare i punti di massimo e di minimo e il massimo e il minimo.

A3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 36e^{-x} \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

A4. Calcolare l'integrale definito $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x - 9 \tan x + 14} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

A5.* Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n^2 + \sqrt{n} + n^{3/2}}{n^{4/5} + 3n^2} \right)^{2\sqrt{n}} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sinh(\sqrt{x}) - 2 \sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{x^{-1/2} (e^{x^3} - \cos(x) + 3 \ln(1 + x^{5/2}))} =$

A6. Determinare per quali $\alpha > 0$ converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{n^\alpha} \right) \sinh \frac{3}{n^{2\alpha}}}{1 - \cos \frac{1}{n^3}}$.

A7. Risolvere in $\mathbb{C}$ (usando la forma esponenziale) l'equazione: $\frac{\bar{z}}{z^6} = 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

A8. Determinare il polinomio di Taylor di grado 2 e centrato in $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = e^{2+8x} \ln(2x)$:

B1. Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che esiste (finito o infinito) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Allora:

☐ **A** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. ☐ **B** $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n}$ esiste (finito o infinito). ☐ **C** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. ☐ **D** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n$ non esiste.

B2. Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni reali, tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono. Allora:

☐ **A** $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + (-1)^n b_n)$ converge. ☐ **B** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ converge. ☐ **C** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge. ☐ **D** $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n + \cos(2\pi n) b_n]$ converge.

B3. $\star$ Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ una funzione monotona. Allora ☐ **A** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste.

☐ **B** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$. ☐ **C** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. ☐ **D** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$.

B4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $c \in [a, b]$. Allora $\int_b^c f(x) dx =$ ☐ **A** $\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ ☐ **B** $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$ ☐ **C** $-\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ ☐ **D** $-\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$

B5. $\star$ Dato $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definita $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{[\tan x]^2}\right)$ se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $g(x) = 0$ se $x = 0$ oppure se $x = \pm \frac{\pi}{2}$. Allora ☐ **A** g non è limitata in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ☐ **B** g è continua in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ☐ **C** g è dispari. ☐ **D** g ha massimo e minimo assoluti in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

B6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t) \sim t$ per $t \rightarrow 0$. Allora ☐ **A** $f(e^{x^2} - 1) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

☐ **B** $f(e^{x^2} - 1) \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$. ☐ **C** $f(e^{x^2} - 1)$ è dispari. ☐ **D** $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2} - 1)}{x}$.

B7. Sia $p(x) = 2 + x^2$ il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro $x_0 = 1$ per la funzione f . Allora

☐ **A** $f(1) = 2, f'(1) = 0, f''(1) = 1$. ☐ **B** $f(1) = 2, f'(1) = 0, f''(1) = 2$. ☐ **C** $f(1) = 3, f'(1) = 2, f''(1) = 2$. ☐ **D** $f(1) = 3, f'(1) = 2, f''(1) = 1$.

B8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona strettamente crescente e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \tanh f(x)$. Allora

☐ **A** $g'(x) = [1 - (\tanh f(x))^2] f'(x)$. ☐ **B** g è monotona strettamente decrescente. ☐ **C** $g(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. ☐ **D** g è monotona strettamente crescente.
