

1) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \ln(9+x^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) & x \geq 0 \\ 2\ln 3 - 7x - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Denotati con x_m e x_M gli unici punti di minimo e di massimo locale per f , calcolare $2(x_m + x_M)$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \ln 9 = 2\ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = 2\ln 3$$

$$f(0) = 2\ln 3$$

Pertanto f è continua in $x=0$; è poi continua ovunque perché in $x>0$ e in $x<0$, f è data da funzioni ivi continue.

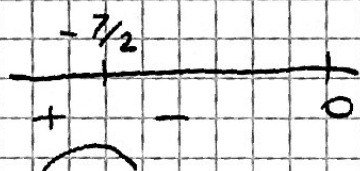
Per determinare massimi e minimi, passiamo al calcolo delle derivate prime

$$x < 0 \quad f'(x) = -7 - 2x$$

$$\begin{aligned} x > 0 \quad f'(x) &= \frac{2x}{x^2+9} - \frac{1/3}{1+(\frac{x}{3})^2} \\ &= \frac{2x}{x^2+9} - \frac{3}{x^2+9} = \frac{2x-3}{x^2+9} \end{aligned}$$

Inoltre

$$x < 0 \quad f' \geq 0 \quad 2x+7 \leq 0 \quad x \leq -\frac{7}{2}$$



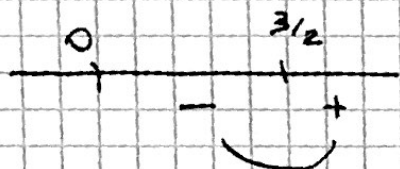
$x = -\frac{7}{2}$ è un punto di massimo locale

$$x > 0$$

$$f' \geq 0$$

$$2x - 3 \geq 0$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$



$x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo locale

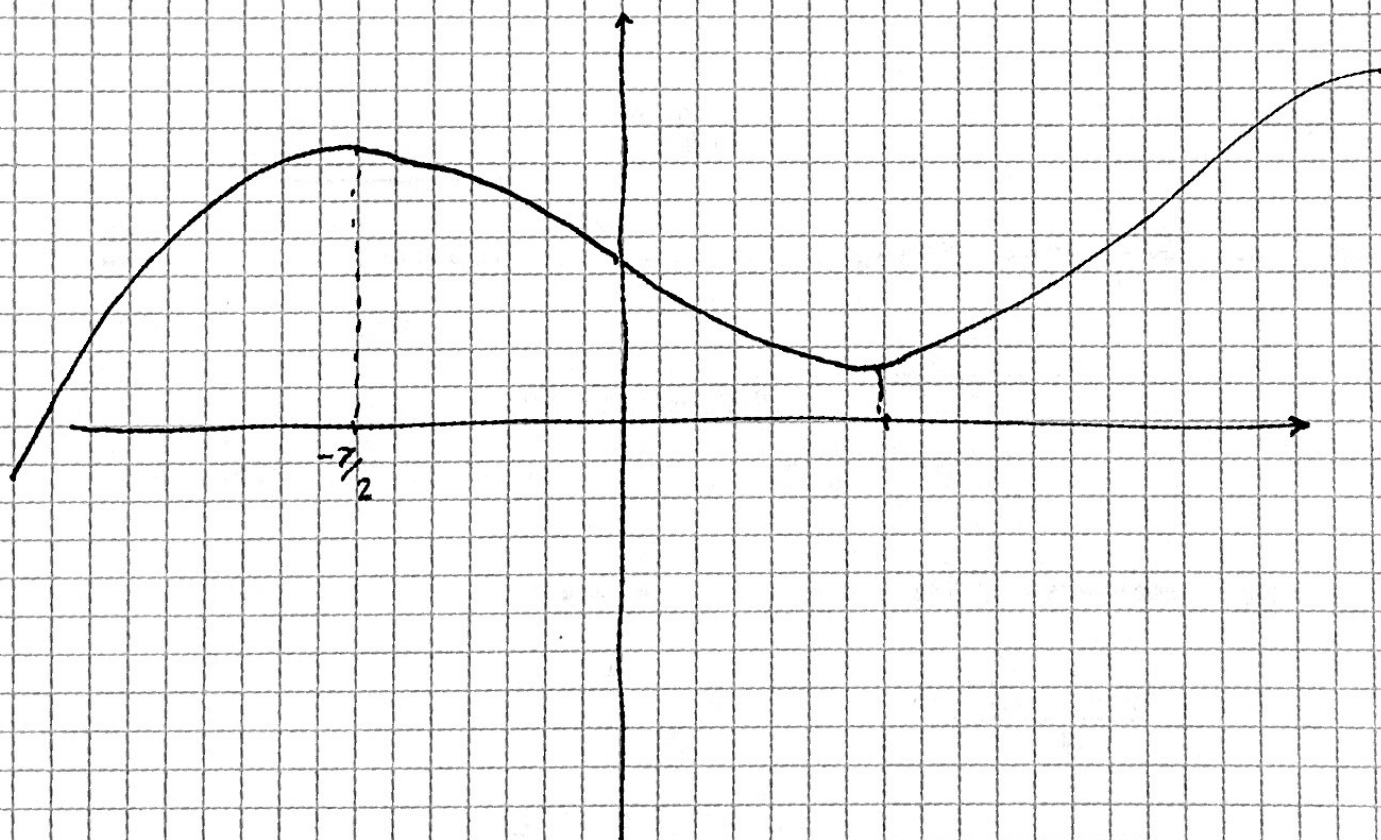
Pertanto

$$x_M = -\frac{7}{2}$$

$$x_m = \frac{3}{2}$$

$$2(x_m + x_M) = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) = -4$$

Anche se non è richiesto, riportiamo sotto il grafico di f (non in scala)



2) Si indichi con I il valore dell'integrale

$$I = \int_1^5 3x^2 \ln(e^{1/3} x) dx$$

Calcolare $\frac{I}{5^2 \ln 5}$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_1^5 3x^2 \ln(e^{1/3} x) dx &= \int_1^5 3x^2 \left(\frac{1}{3} + \ln x \right) dx \\ &= \int_1^5 x^2 dx + 3 \int_1^5 x^2 \ln x dx \\ &= \int_1^5 x^2 dx + \left. x^3 \ln x \right|_1^5 - \int_1^5 x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= 125 \ln 5 = 5^3 \ln 5 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{I}{5^2 \ln 5} = \frac{5^3 \ln 5}{5^2 \ln 5} = 5$$

3) Sia z l'unica radice con parte immaginaria positiva dell'equazione

$$z^2 = -98i$$

Calcolare il valore di $z + \frac{98}{z}$

Osserviamo che, tenendo conto dell'espressione per z ,

$$\begin{aligned} z + \frac{98}{z} &= \frac{z^2 + 98}{z} = \frac{-98i + 98}{z} \\ &= \frac{98}{z} (1 - i) \end{aligned}$$

Calcoliamo pertanto z . Abbiamo

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{-98i} = \sqrt{98 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 7} \left[\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

con $k=0, 1$.

Risultato

$$Z_0 = \sqrt[4]{7} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{7} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 7(-1+i) = -7(1-i)$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \cdot 7 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot 7 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 7(1-i)$$

Dal momento che siamo interessati alla radice con parte immaginaria positiva, si tratta di Z_0 .

Concludiamo che

$$Z + \frac{98}{Z} = \frac{98}{Z} (1-i) = \frac{98(1-i)}{-7(1-i)} = -14$$

4) Sia

$$F(x) = \int_2^{4x} e^{t^2} dt \quad x \in \mathbb{R}$$

Sia a_2 il coefficiente del termine di grado 2 dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 1$. Calcolare $e^{-16} a_2$

Lo sviluppo di Taylor cercato è

$$\begin{aligned} P_2(x; 1) &= F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2!} (x-1)^2 \\ &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$a_2 = \frac{F''(1)}{2!}$$

Se utilizziamo il Teorema fondamentale del Calcolo, abbiamo che

$$F'(x) = e^{(4x)^2} \cdot 4 = 4e^{16x^2}$$

da cui traiamo

$$F''(x) = 4 \cdot e^{16x^2} \cdot 32x \\ = 128x e^{16x^2}$$

$$F''(1) = 128 e^{16}$$

$$a_2 = \frac{128 e^{16}}{2} = 64 e^{16}$$

Concludiamo che

$$e^{-16} a_2 = e^{-16} 64 e^{16} = 64$$

5) Sia
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\cosh\left(\frac{3}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) \right]}{e^{6/n^3} - 1}$$

Calcolare $6L$

Utilizziamo gli sviluppi noti.

$$\cosh\left(\frac{3}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{3}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n^2}\right)^2 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n^2}\right)^2 \right] \\ = \left(\frac{3}{n^2}\right)^2 = \frac{9}{n^4}$$

$$e^{6/n^3} - 1 = 1 + \frac{6}{n^3} - 1 = \frac{6}{n^3}$$

Pertanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \frac{9}{n^4}}{\frac{6}{n^3}} = \frac{9}{6}$$

e

$$6L = 6 \cdot \frac{9}{6} = 9$$

6) Si consideri la serie dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{7}{n^5}\right) \cos\left(\frac{3}{n}\right)}{n^{\alpha} \ln\left(1+\frac{7}{n}\right) e^{3/n}}$$

Determinare l'estremo inferiore dei valori di α per cui la serie converge

Posto

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{7}{n^5}\right) \cos\left(\frac{3}{n}\right)}{n^{\alpha} \ln\left(1+\frac{7}{n}\right) e^{3/n}},$$

per $n \gg 1$, abbiamo, utilizzando gli sviluppi asintotici

$$a_n \sim \frac{\frac{7}{n^5}}{n^{\alpha} \frac{7}{n}} = \frac{1}{n^{\alpha-1+5}} = \frac{1}{n^{\alpha+4}}$$

A finché la serie converge, deve essere

$$\alpha + 4 > 1$$

$$\alpha > -3$$

L'estremo inferiore cercato è pertanto -3 .

7) Sia $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Poiché f è continua, possiamo concludere da quanto noto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Per definizione di limite, scelto $\epsilon = \frac{1}{2}$, esiste

$\delta > 0$ t.c. $\forall x \in [-\delta, \delta]$ abbiamo

$$1 - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}$$

In particolare, nell'intervallo indicato, $f(x) \geq \frac{1}{2}$, ossia
b)

8) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata positiva e si

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Applicando il Teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F''(x) = f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poiché $F''(x) > 0 \quad \forall x$, concludiamo che F è una funzione convessa, cioè b)

9) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$

Se $n \rightarrow \infty$, anche n^2 è un numero intero e tende anch'esso a ~~più~~ ∞ .

Pertanto, abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n^2) = 0$$

cioè c)

10) Si supponga che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente

Se la serie converge, per la condizione necessaria di convergenza, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$$

cioè a)

11) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, la cui derivata $f'(x)$ ha lo stesso segno di x per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dalle ipotesi poste, risulta

$$\begin{array}{c} x=0 \\ \hline f'(x) < 0 \quad | \quad f'(x) > 0 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} | \quad + \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

Pertanto in $x=0$ f ha un punto di minimo assoluto e concludiamo che

$$f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

cioè a)

12) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Se costruiamo il rapporto incrementale in $x=0$, abbiamo, in base alle informazioni date,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{o(x^2)}{x} = o(x)$$

Pertanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} o(x) = 0 = f'(0)$, cioè b)