

① Si consideri l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{6x^{a-5}}{1+x^3+e^{(5-a)x}} dx$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$ e sia A l'insieme dei valori $a \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale converge. Si calcoli $\sup A$.

Poniamo momentaneamente $a-5 = \lambda$. Perciò abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{6x^\lambda}{1+x^3+e^{-\lambda x}} dx.$$

Se $\lambda = 0$ abbiamo $\int_1^{+\infty} \frac{6}{2+x^3} dx$ e poiché $3 > 1$, l'integrale converge.

Se $\lambda < 0$, poiché $x^\lambda = \frac{1}{x^{|\lambda|}}$, abbiamo

$$\frac{6x^\lambda}{1+x^3+e^{-\lambda x}} \approx \frac{6}{x^{|\lambda|}} \frac{1}{e^{|\lambda|x}} = \frac{6}{x^{|\lambda|}} e^{-|\lambda|x}$$

e la presenza dell'esponenziale decrescente garantisce che anche in questo caso l'integrale converge $\forall \lambda < 0$.

Se $\lambda > 0$, abbiamo

$$\frac{6x^\lambda}{1+x^3+e^{-\lambda x}} \approx \frac{6x^\lambda}{x^3} = \frac{6}{x^{3-\lambda}}$$

e l'integrale converge se

$$3-\lambda > 1 \quad 0 < \lambda < 2$$

Quindi l'integrale converge per $\lambda < 2 \Rightarrow a-5 < 2$
 $a < 7$. Dunque $\sup A = 7$.

② Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(7+6x) + \ln(7-6x) - 2\ln 7}{e^{(x/7)^2} - 1}$$

Osserviamo che

$$\ln(7+6x) = \ln 7 + \ln\left(1 + \frac{6}{7}x\right)$$

$$\ln(7-6x) = \ln 7 + \ln\left(1 - \frac{6}{7}x\right)$$

Quindi, ci riduciamo a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{6}{7}x\right) + \ln\left(1 - \frac{6}{7}x\right)}{e^{(x/7)^2} - 1}$$

Poiché

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

$$e^t = 1 + t + o(t),$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{6}{7}x\right) + \ln\left(1 - \frac{6}{7}x\right)}{e^{(x/7)^2} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\frac{6}{7}x} - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}x\right)^2 - \cancel{\frac{6}{7}x} - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}x\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{7}\right)^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{36}{49}x^2}{\frac{x^2}{49}} = -36.$$

③ Si consideri l'equazione in campo complesso

$$z^4 - 6z^2 - 3 \cdot 3^2 = 0$$

e siano z_1, z_2, z_3, z_4 le sue radici.

Calcolare

$$|z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4|$$

Osserviamo che, se poniamo $z^2 = t$, otteniamo

$$t^2 - 6t - 3 \cdot 9 = 0$$

da cui

$$(t - 9)(t + 3) = 0$$

Perciò

$$(z^2 - 9)(z^2 + 3) = 0$$

e le radici sono

$$z^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (z - 3)(z + 3) = 0$$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = -3$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) = 0$$

$$z_3 = \sqrt{3}i$$

$$z_4 = -\sqrt{3}i$$

Quindi

$$|z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot |z_4|$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 27.$$

④ Sia
$$I = \int_0^{4\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{24}\right)}{\frac{1}{4} + \sin^2\left(\frac{x}{24}\right)} dx.$$

Calcolare $\frac{I}{\pi}$.

Lavoriamo per sostituzione e poniamo $\sin\left(\frac{x}{24}\right) = t$;

Perciò, differenziando entrambi i membri

$$\frac{1}{24} \cos\left(\frac{x}{24}\right) dx = dt \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{24}\right) dx = 24 dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=4\pi \Rightarrow t = \sin\left(\frac{4\pi}{24}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Dunque

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{24}\right)}{\frac{1}{4} + \sin^2\left(\frac{x}{24}\right)} dx = \int_0^{1/2} \frac{24}{\frac{1}{4} + t^2} dt = \int_0^{1/2} \frac{24}{\frac{1}{4} [1 + (2t)^2]} dt$$

$$= 24 \cdot 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{1 + (2t)^2} \cdot 2 dt = 48 \left[\arctg(2t) \right]_0^{1/2}$$

$$= 48 \arctg 1 = \cancel{48}^{12} \cdot \frac{\pi}{4} = 12\pi,$$

e concludiamo che

$$\frac{I}{\pi} = \frac{12\pi}{\pi} = 12.$$

⑤ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{-7x} \left| x \left(x + \frac{1}{7} \right) \right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siano x_1 e x_2 i due punti di massimo locale di f . Calcolare

$$\frac{1}{x_1 \cdot x_2}.$$

Poniamo

$$g(x) = e^{-7x} x \left(x + \frac{1}{7} \right) = e^{-7x} \left(x^2 + \frac{x}{7} \right)$$

E' chiaro che

$$g \geq 0 \quad x \leq -\frac{1}{7}, \quad x \geq 0.$$

Inoltre

$$g'(x) = -7e^{-7x} \left(x^2 + \frac{x}{7}\right) + e^{-7x} \left(2x + \frac{1}{7}\right)$$

$$= e^{-7x} \left(-7x^2 - x + 2x + \frac{1}{7}\right)$$

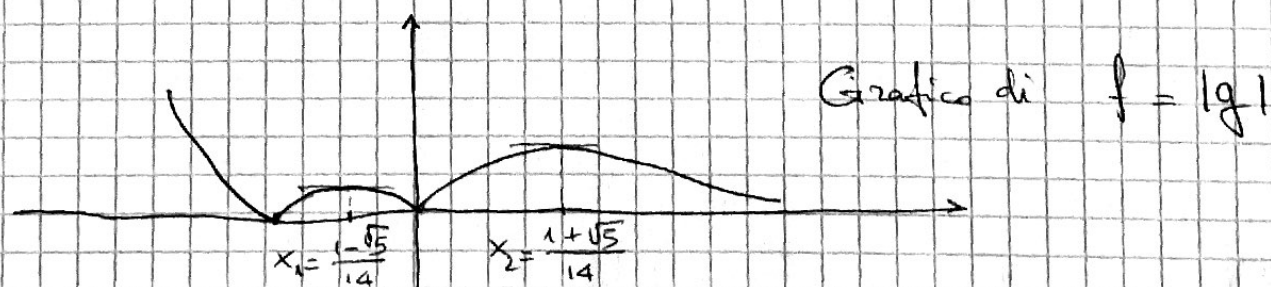
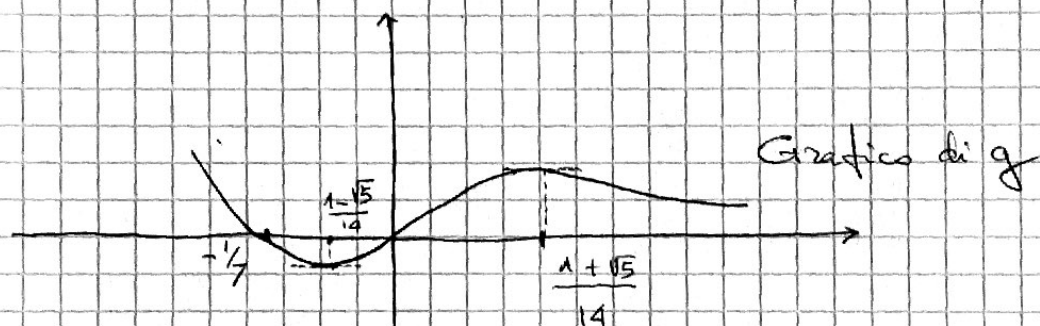
$$= e^{-7x} \left(-7x^2 + x + \frac{1}{7}\right)$$

$$g' \geq 0 \quad -7x^2 + x + \frac{1}{7} \geq 0$$

$$7x^2 - x - \frac{1}{7} \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}}}{14} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{14}$$

$$g' \geq 0 \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{14} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{14}$$



Quindi

$$\frac{1}{x_1 x_2} = \frac{(14)^2}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{196}{1 - 5}$$

$$= -\frac{196}{4} = -49.$$

- ⑥ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(0) = 2$ e $f'(0) = 5$. Sia $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $u(x) = [f(\sinh x)]^2$, $x \in \mathbb{R}$. Calcolare $u'(0)$

Dal Teorema di derivazione della funzione composta, abbiamo

$$u'(x) = 2 f(\sinh x) f'(\sinh x) \cdot \cosh x$$

$$\begin{aligned} u'(0) &= 2 f(0) \cdot f'(0) \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 20. \end{aligned}$$

-
- ⑦ Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ punto di minimo per f .

c) non può essere vera in generale, perché f potrebbe non essere derivabile

d) non può essere vera in generale, perché non sappiamo se f sia continua

a) afferma che x_0 è minimo assoluto stretto, cosa che non sappiamo essere vera in questo caso.

b) è la risposta corretta; è la definizione di minimo locale per f .

-
- ⑧ Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Allora la risposta corretta è a). Infatti, per $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} a_n b_n = n^{1/2} a_n b_n \leq n^{1/2} 3 o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 3 o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

⑨ Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = L$

Allora la risposta corretta è a), che è la definizione del limite della f qui considerato.

⑩ Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Allora

a) non è in generale corretta. Possiamo solo dire che $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow 0$.

b) non è in generale corretta. Dal testo non risulta in alcun modo che f sia continua.

d) non è in generale corretta; f potrebbe non essere definita in zero.

c) è la risposta corretta. Definiamo $\tilde{f}$ la funzione che coincide con f $\forall x \neq 0$ e che assume in $x=0$ il valore del limite, per definizione $\tilde{f}$ è continua in $x=0$.

⑪ Sia $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt \quad \forall x \in [-2, 2].$$

Allora, per il Teorema fondamentale del Calcolo, F è di classe C^1 e risulta

$$F'(x) = f(x)$$

$$\forall x \in [-2, 2].$$

Se F di classe C^1 è crescente, ciò implica che $F'(x) \geq 0$ per $x \in [-2, 2]$ e, dunque, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$, ossia proprio la risposta b) è corretta.

⑫ Sia $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(-1) = -f(1)$. Allora

1) Se $f(-1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ e la f si annulla in almeno un punto dell'intervallo $[-1, 1]$ (addirittura si annulla in due punti). La risposta corretta è la a)

2) Se $f(-1) \neq 0$, allora la funzione è continua in un intervallo chiuso, assume valori opposti agli estremi e per il Teorema degli zeri esiste almeno un punto dell'intervallo in cui si annulla. Anche in questo caso la risposta corretta è la a).