

**A1.** Sia  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = \frac{1}{x-1} + (x-1)$ . Determinare i punti di estremo di  $f$  precisando se si tratta di estremi locali o globali.

**A2.** Calcolare le quattro radici dell'equazione  $(z-2)^4 + 3^4 = 0$ .

**A3.** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = -14xu(x) + e^{-7x^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

**A4\*** Determinare  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  in modo tale che la funzione  $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x+2} & \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}(\alpha x) + \beta & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia di classe  $C^1$ .

**A5.** Stabilire per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'integrale  $\int_2^4 e^{2x}(x-2)^\alpha dx$  converge.

**A6\*** Determinare per quali valori dei parametri reali  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{4 + (n+6)^\beta \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

**A7.** Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2/n} - 1 - \sin \frac{2}{n}}{\ln\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}$

**A8\*** Calcolare il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sqrt{2}x) - 2x^2}{x^4 - 1 + \cos(x^2)}$ .

**A9.** Calcolare  $\int_0^1 x \ln \sqrt[3]{x} dx$ .

**A10\*** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x^2 - 1|$ . Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1/2, f(1/2))$ .

---

---

**B1.\*** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_o \in (a, b)$ ;  $f$  è derivabile in  $x_o$  se  A esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + 2h) - f(x_o)}{2h}$ .  
 B esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{|h|}$ .  C esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + |h|) - f(x_o)}{|h|}$ .  D esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{x_o}$ .

**B2.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = 0$  se  $x \leq 0$ ,  $f(x) = e^{3x}$  se  $x > 0$ . Allora  A  $f$  è continua.  
 B  $f$  è monotona.  C  $f$  è iniettiva.  D  $f$  è convessa.

**B3.** Sia  $f$  una funzione continua in 0. Allora  A  $f$  è derivabile in 0.  B  $f(0) = 0$ .  C  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = f(0)$ .  
 D  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\cos x) = f(1)$ .

**B4.** Sia  $a_n$  una successione con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  per  $\ell \in \mathbb{R}$ . Allora  A  $a_n \geq \ell$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  B  $a_n$  è monotona.  
 C  $a_n \leq \ell$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  D  $a_n$  è limitata.

**B5.** Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^2$  se  $x \in (0, 1)$  e  $f(x) = \frac{e}{x}$  se  $x \in [1, +\infty)$ . Allora  
 A  $f$  ha massimo ma non ha minimo in  $(0, +\infty)$ .  B  $f$  non ha né massimo né minimo in  $(0, +\infty)$ .  
 C  $f$  non ha massimo ma ha minimo in  $(0, +\infty)$ .  D  $f$  ha massimo e minimo in  $(0, +\infty)$ .

**B6.\*** Sia  $a_n$  una successione reale. Si consideri la successione  $b_n = (a_n)^2$ .  A Se  $a_n$  converge allora  $b_n$  converge.  
 B Se  $a_n$  converge allora  $b_n$  diverge.  C Se  $b_n$  diverge allora  $a_n$  diverge.  D Se  $b_n$  converge allora  $a_n$  converge.

**B7.** Si consideri  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n)$  con  $a_n > 0 \forall n$ . Allora la serie converge se  A  $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .  
 B  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ .  C  $a_n \sim \frac{1}{n}$  per  $n \rightarrow \infty$ .  D  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**B8.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora esiste un punto di minimo  $x_m$  in  A  $[a, b]$ .  B  $[a, b)$ .  
 C  $(a, b)$ .  D  $(a, b]$ .

**B9.\*** Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt[3]{t-1} dt$ . Allora  A  $F \notin C^1(\mathbb{R})$ .  B  $F'$  è limitata.  
 C  $F'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ .  D  $F$  non ha punti stazionari.

**B10.\*** Sia  $f(x) = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Sia  $g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x}$ . Allora  A  $g(x) = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .  
 B  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  può essere infinito.  C  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .  D  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  non esiste.

---

## Soluzioni della prova del 03/09/19

### Parte A

**A1.** Risulta  $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1 = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$  per  $x \neq 1$ . Dunque  $f'(x) \geq 0$  se e solo se  $(x-1)^2 - 1 \geq 0$  ossia quando  $x-1 \leq -1$  oppure  $x-1 \geq 1$ . Pertanto  $f$  è crescente negli intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(2, +\infty)$  e decrescente in  $[0, 1)$  e  $(1, 2]$ . Ne risulta che  $x = 0$  è punto di massimo e  $x = 2$  punto di minimo. Si tratta di estremi relativi in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**A2.** Osserviamo che possiamo equivalentemente riscrivere

$$\begin{aligned}(z-2)^4 &= -3^4, \\(z-2)^4 &= 3^4(\cos \pi + i \sin \pi), \\z-2 &= 3 \left[ \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4} \right], \quad k = 0, 1, 2, 3,\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}z_0 &= 2 + 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & z_1 &= 2 + 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\z_2 &= 2 + 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & z_3 &= 2 + 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).\end{aligned}$$

**A3.**  $u(x) = (x+1)e^{-7x^2}$

**A4.** Le due funzioni  $g(x) = 4x/(x+2)$  e  $h(x) = \sin(\alpha x) + \beta$  sono di classe  $C^1$  e sono definite in un intorno del punto  $x_0 = 0$ . Quindi è sufficiente imporre  $g(0) = h(0)$  e  $g'(0) = h'(0)$ . Da cui  $\beta = 0$  ed  $\alpha = 2$ .

**A5.** La funzione integranda  $e^{2x}(x-2)^\alpha$  è continua in  $(2, 4)$  ed è asintotica a  $e^4(x-2)^\alpha$  per  $x \rightarrow 2^+$ . Quindi l'integrale converge per  $\alpha > -1$ .

**A6.** Posto

$$a_n = \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{4 + (n+6)^\beta \sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

otteniamo

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}.$$

Perché la serie risulti convergente, deve essere  $\alpha + \beta - 1 > 1$ , cioè  $\alpha + \beta > 2$ .

**A7.** Utilizzando gli sviluppi notevoli, abbiamo che

$$\begin{aligned}e^{2/n} &= 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{n} \right)^2 + o\left( \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \\ \sin \frac{2}{n} &= \frac{2}{n} - \frac{1}{6} \left( \frac{2}{n} \right)^3 + o\left( \frac{1}{n^3} \right) \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \\ \ln \left( 1 + \frac{7}{n^2} \right) &= \frac{7}{n^2} + o\left( \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2/n} - 1 - \sin \frac{2}{n}}{\ln \left( 1 + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{7}{n^2}} = \frac{2}{7}.$$

- A8.** Usando lo sviluppo di MacLaurin di  $\sin t$  si ha  $(\sin t)^2 = (t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3))^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$  per  $t \rightarrow 0$ . Sostituendo  $t = \sqrt{2}x$  si trova  $\sin^2(\sqrt{2}x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$ . Pertanto il numeratore è asintotico a  $-\frac{4}{3}x^4$  per  $x \rightarrow 0$ . Il denominatore è asintotico a  $x^4 - 1 + 1 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2}x^4$  per  $x \rightarrow 0$ . Dunque il limite richiesto è  $-\frac{8}{3}$ .
- A9.** Integrando per parti, l'integrale richiesto è pari a  $\frac{1}{3} \int_0^1 x \ln x dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{12}$ .
- A10.** L'equazione della retta richiesta è  $y = f(1/2) + f'(1/2)(x - 1/2)$ . Si calcola  $f(1/2) = 3/4$ . Inoltre  $f'(x) = -2x$  per ogni  $x \in (-1, 1)$ , da cui si calcola  $f'(1/2) = -1$ . Sostituendo i valori trovati nella prima espressione si ottiene  $y = 3/4 - (x - 1/2)$ .

## Parte B

- B1.**  A
- B2.**  B Si verifica che  $f$  è monotona non decrescente.
- B3.**  C La funzione  $f(\sin x)$  è continua in  $x = 0$  in quanto composizione di funzioni continue.
- B4.**  D Per proprietà delle successioni convergenti
- B5.**  A
- B6.**  A  $b_n = f(a_n)$  con  $f(t) = t^2$ , essendo  $f$  continua si conclude per un teorema noto. Si escludono le altre risposte con  $a_n = (-1)^n$  e  $a_n = (-1)^n n$ , nel primo caso  $b_n = 1$  converge, nel secondo  $b_n = n^2$  diverge.
- B7.**  A
- B8.**  A Teorema dei max e min per funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
- B9.**  C Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla formula di derivazione della funzione composta si ha  $F'(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot 2x$ .
- B10.**  C Basta riscrivere  $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$  e usare il fatto che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  per ipotesi.