10. Separazione delle variabili ed uso delle trasformate

Nel seguito presentiamo tre metodi per la risoluzione esplicita di alcuni problemi relativi ad Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali: il metodo di separazione delle variabili, il metodo della Trasformata di Fourier e il metodo della Trasformata di Laplace. L'accento sarà soprattutto sul metodo in sè e sui risultati a cui esso conduce, senza soffermarci troppo sugli aspetti più teorici, quali le condizioni per la convergenza delle serie di Fourier ottenute, la compatibilità fra le condizioni iniziali e le condizioni al contorno, ecc. Nella Sezione 11 riprenderemo poi il metodo di separazione delle variabili nell'ambito della teoria degli operatori fra spazi funzionali.

METODO DI SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Primo caso: Equazione iperbolica in un intervallo limitato - Siamo interessati a risolvere il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in }]0,l[\times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che le condizioni di compatibilità fra i dati implicano che

$$f(0) = u(0,0) = 0, \quad f(l) = u(l,0) = 0, \quad g(0) = u_t(0,0) = 0, \quad g(l) = u_t(l,0) = 0.$$

Questi risultati sono molto importanti per assicurare che l'estensioni dispari di f e g (che considereremo fra poco) siano funzioni continue.

Data anche la natura omogenea dell'equazione, assumiamo che la soluzione abbia la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

da cui ricaviamo che

$$XT'' - V^2 X'' T = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{V^2}\frac{T''}{T} - \frac{X''}{X} = 0.$$

Chiaramente deve essere

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{1}{V^2}\frac{T''}{T}.$$

Osserviamo, inoltre, che le condizioni al contorno danno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0.$$

Si tratta, quindi, di risolvere il Problema ai limiti

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Se $\lambda = \alpha^2 > 0$ abbiamo

$$X = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} = D_1 \cosh \alpha x + D_2 \sinh \alpha x$$

ed imponendo le condizioni al contorno abbiamo

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 \sinh \alpha l = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = D_2 = 0.$$

Quindi il caso di $\lambda > 0$ non è significativo. Se $\lambda = 0$ otteniamo

$$X = C_1 + C_2 x$$

ed imponendo le condizioni al contorno abbiamo $C_1 = C_2 = 0$. Se infine $\lambda = -\alpha^2 < 0$ otteniamo

$$X = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

e dalle condizioni al contorno ricaviamo

$$\begin{cases} A = 0 \\ B \sin \alpha l = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha l = n\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{l}.$$

Quindi l'unica soluzione accettabile è

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con } B_n \text{ arbitrario.}$$

Passando alla componente temporale abbiamo

$$\frac{1}{V^2} \frac{T''}{T} = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

da cui otteniamo

$$T = H_n \cos \frac{n\pi V}{l} t + K_n \sin \frac{n\pi V}{l} t.$$

Grazie dunque al principio di sovrapposizione abbiamo che

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n \cos \frac{n\pi V}{l} t + K_n \sin \frac{n\pi V}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

dove abbiamo inglobato in H_n e K_n la costante arbitraria della componente spaziale. Possiamo, ora, concludere, imponendo le condizioni iniziali. Dal momento che

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi V}{l} \left(-H_n \sin \frac{n\pi V}{l} t + K_n \cos \frac{n\pi V}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

otteniamo

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi V}{l} K_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Se, dunque, diamo di f e g l'estensione dispari in tutto l'intervallo $[-l,l]$ e sviluppiamo in serie di Fourier rispetto alla base trigonometrica di $L^2(-l,l)$ abbiamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con} \quad \beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

da cui otteniamo

$$H_n = b_n, \qquad K_n = \frac{l}{n\pi V} \beta_n$$

e con ciò abbiamo finito. Come già accennato all'inizio di questa sezione, tutte le operazioni eseguite (in primis la derivazione termine a termine della serie) sono state fatte senza preoccuparsi delle condizioni che garantiscono la loro effettiva fattibilità.

Secondo caso: Equazione parabolica in un intervallo limitato - Vogliamo, ora, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{in }]0,l[\times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che le condizioni di compatibilità fra i dati implicano che

$$f(0) = u(0,0) = 0, \quad f(l) = u(l,0) = 0.$$

Anche qui il risultato è molto importante per assicurare che l'estensione dispari di f (che considereremo fra poco) sia una funzione continua.

Nuovamente assumiamo che la soluzione abbia la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

da cui ricaviamo che

$$\frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} = 0.$$

Esattamente come nel caso precedente ricaviamo

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

da cui otteniamo
$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con } B_n \text{ arbitrario.}$$
Per quanto riguarda la parte temporale risulta
$$T' + \frac{n^2\pi^2}{l^2} T = 0,$$
da cui
$$T = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t}.$$
In definitiva, dunque, utilizzando ancora una volta il Principio di sovrapposizione,
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$
da cui
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$
Al solito diamo di f l'estensione dispari in tutto l'intervallo $[-l,l]$ e sviluppiamo in serie di Fourier rispetto alla base trigonometrica ottenendo
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$
Otteniamo, dunque, $B_n = b_n$ e con ciò abbiamo finito.

Terzo caso: Equazione ellittica in dominio a simmetria circolare - Ci interessa risolvere il problema bidimensionale
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad B_R(0) \\ u = f \quad \text{su} \quad \partial B_R(0) \end{cases}$$
dove $B_R(0)$ è il cerchio di centro l'origine e raggio R. In questo caso è evidente che occorre procedere alla separazione delle variabili tenendo conto della geometria del problema. Dovremo, quindi, operare in coordinate polari
$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta$$
da cui otteniamo
$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}.$$
Al solito cerchiamo una soluzione nella forma
$$u(\rho,\theta) = F(\rho)\Theta(\theta).$$

Otteniamo

$$F''\Theta + \frac{1}{\rho}F'\Theta + \frac{1}{\rho^2}F\Theta'' = 0,$$

cioè anche

$$\rho^2\frac{F''}{F} + \rho\frac{F'}{F} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

Se teniamo conto delle naturali condizioni di periodicità su Θ, ci riduciamo al seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} \Theta'' - \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{cases}$$

Proprio le condizioni di periodicità ci danno

$$\lambda = 0 \qquad \Theta_0 = A_0,$$

$$\lambda = -n^2 \qquad \Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

$$\lambda > 0 \qquad \text{non esistono soluzioni periodiche.}$$

Passando al corrispondente problema differenziale per ρ, nel caso di $\lambda < 0$ otteniamo

$$\rho^2 F'' + \rho F' - n^2 F = 0.$$

Si tratta di una equazione di Eulero, per la quale cerchiamo soluzioni del tipo $F = \rho^\alpha$. Otteniamo

$$\alpha(\alpha-1)\rho^\alpha + \alpha\rho^\alpha - n^2\rho^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm n.$$

Quindi

$$F = H_n\rho^n + K_n\rho^{-n}.$$

Per $\lambda = 0$ l'equazione caratteristica ha la radice $\alpha = 0$ doppia. Sempre dalla teoria delle equazioni di Eulero ricaviamo che

$$F = H_0 + K_0 \ln\rho.$$

In definitiva, dunque,

$$u(x,t) = (H_0 + K_0\ln\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}(H_n\rho^n + K_n\rho^{-n})(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

dove al solito la costante A_0 è stata assorbita in H_0 e K_0. Poichè u deve essere regolare per $\rho \to 0^+$, occorre che i termini singolari (il logaritmo e le potenze con esponente negativo) siano nulli. Possiamo, dunque, scrivere

$$u(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta).$$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\cos n\Phi \, d\Phi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\sin n\Phi \, d\Phi$$

e considerando che

$$u(R,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

otteniamo

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\, d\Phi +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\rho}{R})^n \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\cos n\Phi \, d\Phi \cos n\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\sin n\Phi \, d\Phi \sin n\theta\right].$$

Vogliamo ora dare a questa espressione una forma più compatta. Abbiamo, quindi,

$$u(R,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\, d\Phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\rho}{R})^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\cos n(\Phi-\theta)\, d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\rho}{R})^n (e^{in(\Phi-\theta)} + e^{-in(\Phi-\theta)})\right] d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\left[-1 + \frac{1}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\Phi-\theta)}} + \frac{1}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\Phi-\theta)}}\right] d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\left[-1 + \frac{R}{R-\rho e^{i(\Phi-\theta)}} + \frac{1}{R-\rho e^{-i(\Phi-\theta)}}\right] d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\Phi) + \rho^2}\, d\Phi.$$

Questa formula è nota come *Formula di Poisson.* Osserviamo che se $\rho = 0$ (che corrisponde al centro del cerchio) abbiamo

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi)\, d\Phi$$

che altro non è se non la formula del valor medio. Inoltre, se introduciamo il cosiddetto *Nucleo di Poisson*

$$P(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2}$$

è evidente che la relazione precedente si può scrivere come

$$u(\rho, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi) P(\rho, \theta - \Phi) \, d\Phi$$

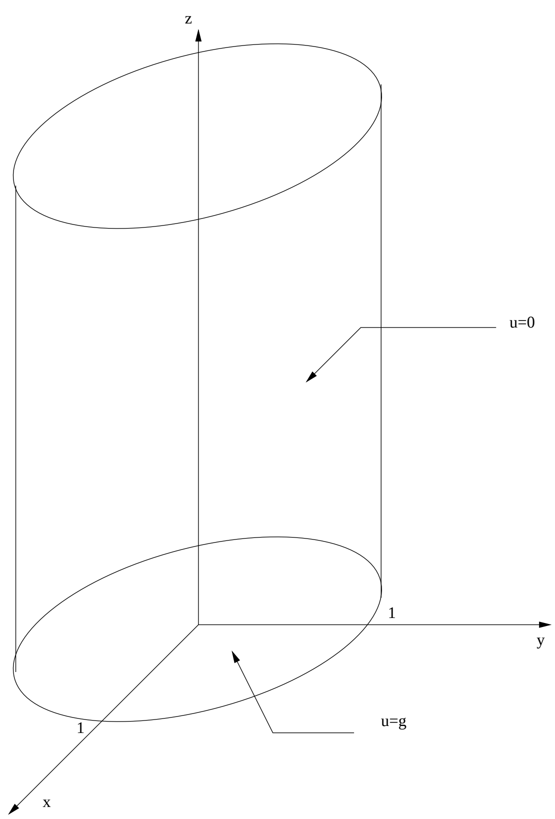
che è una convoluzione per funzioni periodiche.

Quarto caso: Equazione ellittica in dominio a simmetria cilindrica - Il caso precedente sottolinea l'importanza di utilizzare coordinate che riflettano correttamente la geometria del problema. Come ulteriore esemplificazione di questo aspetto, consideriamo il cilindro

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\} \times]0, +\infty[$$

e il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in} \;\; \Omega \\ u(1, \theta, z) = 0 \\ u(\rho, \theta, 0) = g(\rho) \\ \lim\limits_{z \to +\infty} u(\rho, \theta, z) = 0. \end{cases}$$



È chiaro dalla formulazione stessa che in questo caso occorre fare riferimento alle coordinate cilindriche

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = z,$$

per le quali otteniamo

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z).$$

Sostituendo ed operando al solito otteniamo

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

$$\rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} + \rho^2\frac{Z''}{Z} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Tenendo al solito conto delle condizioni di periodicità, abbiamo

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\lambda = n^2 \quad \Rightarrow \quad \Theta = e^{\pm in\theta}.$$

Risostituendo otteniamo

$$\rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} + \rho^2\frac{Z''}{Z} = n^2,$$

cioè

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} - \frac{n^2}{\rho^2} = \frac{Z''}{Z}.$$

Dalle condizioni al contorno abbiamo

$$u(\rho, \theta, 0) = g(\rho) \quad \Rightarrow \quad R(\rho)\Theta(\theta)Z(0) = g(\rho) \quad \Rightarrow \quad Z(0) = 1,$$

$$\lim_{z\to+\infty} u(\rho, \theta, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to+\infty} R(\rho)\Theta(\theta)Z(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(+\infty) = 0.$$

Ci riduciamo, dunque, al seguente Problema ai limiti

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0 \\ Z(0) = 1 \\ Z(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Le condizioni ai limiti impongono $\mu > 0$. Poniamo $\mu = k^2$ ed otteniamo

$$Z = e^{-kz}.$$

Risostituendo abbiamo infine

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + (k^2 - \frac{n^2}{\rho^2})R = 0.$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile $x = k\rho$ da cui $\rho = \frac{x}{k}$ ed anche

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\rho} = k\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{d\rho^2} = k^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

Posto perciò

$$y(x) = R(\rho) = R(\frac{x}{k}),$$

abbiamo

$$k^2y'' + \frac{k^2}{x}y' + (k^2 - \frac{n^2k^2}{x^2})y = 0,$$

cioè

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Si tratta dell'equazione di Bessel, il cui integrale generale è

$$y_n(x) = A_nJ_n(x) + B_nN_n(x),$$

dove J_n e N_n sono le funzioni di Bessel di prima e seconda specie di ordine n. A causa del comportamento singolare di N_n nell'origine, il termine B_n deve essere nullo e concludiamo che sono soluzioni tutte le funzioni

$$u_{nk} = A_{nk}J_n(k\rho)e^{\pm in\theta}e^{-kz}$$

e quindi

$$u = \sum_{n,k} A_{nk}J_n(k\rho)e^{\pm in\theta}e^{-kz}.$$

Osserviamo che $u(\rho, \theta, 0) = g(\rho)$ ed $u = 0$ sul bordo laterale del cilindro Ω. Questo impone simmetria radiale alla funzione (indipendenza da θ). Quindi deve essere $n = 0$ ed otteniamo

$$u = \sum_k A_kJ_0(k\rho)e^{-kz}.$$

Se ora imponiamo le condizioni sulla superficie laterale del cilindro, abbiamo $u(1, \theta, z) = 0$ da cui otteniamo

$$\sum_k A_kJ_0(k)e^{-kz} = 0$$

e ricaviamo allora che k deve essere uno zero di J_0. Detti λ_s gli zeri positivi di J_0 otteniamo

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} A_sJ_0(\lambda_s\rho)e^{-\lambda_s z}.$$

Per concludere dobbiamo imporre la condizione per $z = 0$. A questo scopo consideriamo lo spazio

$$L_x^2(0,a) = \{f : [0,a] \to \mathbf{R} : \int_0^a |f(x)|^2 x\, dx < +\infty\}.$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert, anche se la verifica della completezza non è immediata (qui la tralasciamo). Rispetto al normale L^2, l'usuale misura di Lebesgue dx è sostituita dalla misura xdx. In questo spazio una base è data dalle funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{aJ_1(x_n)} J_0(x_n \frac{x}{a})$$

dove i valori x_n sono gli zeri positivi di J_0. Tornando al nostro caso, possiamo allora sviluppare $g(\rho)$ nella base definita proprio da queste φ_n. Infatti

$$u(\rho, 0) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_0(\lambda_s \rho)$$

e con $a = 1$

$$g(\rho) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s J_0(\lambda_s \rho)$$

con

$$c_s = \frac{2}{J_1^2(\lambda_s)} \int_0^1 \rho g(\rho) J_0(\lambda_s \rho)\, d\rho$$

da cui concludendo ricaviamo che $A_s = c_s$.

Quinto caso: Equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico monodimensionale - Negli esempi precedenti abbiamo visto tutta l'importanza degli sviluppi in serie di Fourier qualora si operi con la separazione delle variabili. Come vedremo meglio nella Sezione 13, questo non è affatto un caso, ma è direttamente legato alla particolare natura degli operatori che intervengono nelle equazioni differenziali considerate. Per ribadire ulteriormente tutta l'importanza degli sviluppi, concludiamo con un ulteriore esempio.

Ci occupiamo qui di un caso semplice (ma significativo!) di equazione di Schrödinger. Vale la pena di sottolineare che, benchè formalmente le equazioni di Schrödinger si avvicinino alle equazioni paraboliche, le loro proprietà sono molto più simili a quelle delle equazioni iperboliche.

Vogliamo rilsolvere

$$\begin{cases} \dfrac{ih}{2\pi} u_t + \dfrac{h^2}{8\pi^2 m} u_{xx} - \dfrac{1}{2} k x^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(\pm\infty, t) = 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} |u(x,t)|^2\, dx = 1. \end{cases}$$

Al solito cerchiamo la soluzione nella forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ da cui

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{T'}{T} + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{X''}{X} - \frac{1}{2}kx^2 = 0.$$

Poniamo, dunque, $\frac{ih}{2\pi}\frac{T'}{T} = E$ da cui otteniamo

$$T(t) = Ce^{-i\frac{2\pi Et}{h}}$$

con C costante arbitraria. Passando alla parte spaziale abbiamo

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}X'' - \frac{1}{2}kx^2 X = -EX$$

$$X'' + \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2}E - \frac{4\pi^2}{h^2}mkx^2\right)X = 0$$

a cui dobbiamo associare le condizioni ai limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} X(x) = 0.$$

Se introduciamo il cambiamento di variabile $y = \alpha x$ con $\alpha = \sqrt[4]{\frac{4\pi^2}{h^2}mk}$ da cui ricaviamo $\frac{d}{dx} = \alpha\frac{d}{dy}$ e poniamo

$$Y(y) = X(x) = X(\frac{y}{\alpha})$$

ricaviamo

$$\alpha^2 Y'' + \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2}E - \alpha^2 y^2\right)Y = 0$$

che possiamo riscrivere

$$Y'' - (\lambda - y^2)Y = 0 \qquad \text{con} \;\; \lambda = \frac{4\pi}{h}\sqrt{\frac{m}{k}}E$$

a cui associamo le condizioni ai limiti

$$\lim_{y\to\pm\infty} Y(y) = 0.$$

Considerazioni di tipo euristico, legate a quanto sappiamo su $L^2(\mathbf{R})$ e la sua base (si veda quanto fatto nella Sezione 7), suggeriscono di cercare una soluzione del tipo

$$Y(y) = H(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$$

dove H è un polinomio in y di grado arbitrario ma finito. Poichè

$$Y' = H'(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - yH(y)e^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad Y'' = H''(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - 2yH'(y)e^{-\frac{y^2}{2}} + (y^2-1)H(y)e^{-\frac{y^2}{2}},$$

sostituendo otteniamo

$$H'' - 2yH' + (\lambda - 1)H = 0.$$

Cerchiamo una soluzione che sia un polinomio, quindi

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

con i coefficienti $a_n = 0 \; \forall n \geq \bar{n}$. Abbiamo quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n y^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^n + (\lambda - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = 0,$$

cioè anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n + (\lambda - 1)a_n] y^n = 0,$$

da cui otteniamo

$$a_{n+2} = \frac{2n + 1 - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Osserviamo che il valore di a_0 determina tutti i valori dei coefficienti d'ordine pari, mentre il valore di a_1 determina i valori dei coefficienti d'ordine dispari. Inoltre, dal momento che una equazione lineare omogenea del secondo ordine ha due integrali linearmente indipendenti, avremo due possibilità:

scelta 1 - $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ che determina il primo integrale pari;
scelta 2 - $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ che determina il secondo integrale dispari.

Tuttavia, se vogliamo avere a che fare effettivamente con una soluzione polinomiale e non con una serie, è necessario che i coefficienti siano nulli da un certo indice $\bar{n}$ in poi. Questo richiede $\lambda = 2k + 1$ con k naturale da cui otteniamo

$$a_{n+2} = \frac{2(n-k)}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Inoltre per k pari occorre assumere la scelta 1, per k dispari la scelta 2. In corrispondenza abbiamo, dunque,

$$k = 0, \quad a_0 = 1,\; a_1 = 1,\; a_2 = a_3 = \ldots = 0, \quad H_0 = 1;$$

$$k = 1, \quad a_0 = 0,\; a_1 = 1,\; a_2 = a_3 = \ldots = 0, \quad H_1 = y;$$

$$k = 2, \quad a_0 = 1,\; a_1 = 0,\; a_2 = -2,\; a_3 = a_4 = \ldots = 0, \quad H_2 = 1 - 2y^2;$$

$$\vdots$$

Non è dfficile verificare che i polinomi H_n sono in effetti i polinomi di Hermite

$$H_n(y) = (-)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}.$$

Dunque le funzioni

$$Y_n = c_n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

soddisfano l'equazione differenziale, le condizioni di annullamento all'infinito viste sopra e la condizione

$$\int_{\mathbf{R}} |Y_n|^2 \, dy \leq +\infty.$$

Inoltre

$$E_n = \frac{(2n+1)h}{4\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

cioè i valori ammessi per E costituiscono un insieme discreto. Infine, analogamente a quanto fatto per tutti gli altri casi, otteniamo

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(\alpha x) e^{-iE_n \frac{2\pi t}{h} - \frac{\alpha^2 x^2}{2}}.$$

Occorre ora determinare le costanti c_n (finora arbitrarie) in modo da soddisfare le condizioni richieste. Posto $t = 0$ abbiamo

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

da cui

$$e^{\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(\alpha x).$$

Se poniamo come prime $\alpha x = y$ e definiamo $\psi(y) = e^{\frac{y^2}{2}} \varphi(\frac{y}{\alpha})$ abbiamo

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(y).$$

Se consideriamo lo spazio

$$L^2_{e^{-y^2}}(\mathbf{R}) = \{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \text{t.c.} \quad \int_{\mathbf{R}} |f|^2 e^{-y^2} \, dy < +\infty \},$$

in tale spazio i polinomi di Hermite v_n normalizzati, ossia i polinomi

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n(y)$$

costituiscono una base. Utilizzando, dunque, quanto visto nella Sezione 7 abbiamo

$$c_n = \frac{(\psi, H_n)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} = \frac{(\psi, H_n)}{\sqrt{\pi}2^n n!} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!} \int_{\mathbf{R}} \psi(y) H_n(y) e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^n n!} \int_{\mathbf{R}} \varphi(\frac{y}{\alpha}) H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Per il suo significato fisico è

$$\int_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|^2\, dx = 1$$

e per quanto noto dalla disuguaglianza di Parseval deve essere allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|u\|_{L^2(\mathbf{R})} = 1$$

e con ciò abbiamo finito.

Come già osservato a proposito del Metodo di separazione delle variabili, ci limitiamo a considerare alcuni problemi ai valori iniziali o al bordo per equazioni differenziali in due variabili. In tutti questi problemi una delle due variabili, in genere la x, è definitra in tutto $\mathbf{R}$.

Primo caso: Equazione iperbolica in tutto R - Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Assumiamo f e g in $L^1(\mathbf{R})$ o in $L^2(\mathbf{R})$. Conosciamo già l'espressione della soluzione u, che abbiamo ricavato per integrazione diretta dell'equazione ridotta a forma canonica nella Sezione 9. Qui la ricaviamo per altra via, facendo appunto ricorso alla trasformata di Fourier. Data, infatti, la soluzione $u = u(x,t)$, consideriamo la sua trasformata di Fourier $\hat{u}$ rispetto alla variabile x,

$$\hat{u}(k,t) = \mathcal{F}(u(x,t),k) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ikx} u(x,t)\, dx.$$

Abbiamo, allora

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{u} + V^2k^2\hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = A(k)e^{ikVt} + B(k)e^{-ikVt}.$$

Se imponiamo, poi, le condizioni iniziali, abbiamo

$$\hat{u}(k,0) = A(k) + B(k) = \hat{f}(k),$$

$$\hat{u}'(k,0) = ikVA(k) - ikVB(k) = \hat{g}(k)$$

da cui otteniamo

$$A(k) = \frac{1}{2}\hat{f}(k) + \frac{1}{2ikV}\hat{g}(k),$$

$$B(k) = \frac{1}{2}\hat{f}(k) - \frac{1}{2ikV}\hat{g}(k).$$

Quindi

$$\hat{u}(k,t) = \frac{e^{ikVt} + e^{-ikVt}}{2}\hat{f}(k) + \frac{e^{ikVt} - e^{-ikVt}}{2ikV}\hat{g}(k).$$

Se antitrasformiamo otteniamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ikVt} + e^{-ikVt}}{2}\hat{f}(k)e^{ikx}\, dk + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ikVt} - e^{-ikVt}}{2ikV}\hat{g}(k)e^{ikx}\, dk.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ikVt}+e^{-ikVt}}{2}\hat{f}(k)e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{f}(k)e^{ik(x+Vt)}}{2}\,dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{f}(k)e^{ik(x-Vt)}}{2}\,dk = \frac{f(x+Vt)+f(x-Vt)}{2}.$$

Venendo al secondo integrale,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{\hat{g}(k)}{2ikV}[e^{ik(x+Vt)}-e^{ik(x-Vt)}]\,dk = \frac{1}{2V}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\left(\hat{g}(k)\int_{x-Vt}^{x+Vt} e^{ik\xi}\,d\xi\right)\,dk\right] =$$

$$= \frac{1}{2V}\int_{x-Vt}^{x+Vt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{g}(k)e^{ik\xi}\,dk\right)\,d\xi = \frac{1}{2V}\int_{x-Vt}^{x+Vt} g(\xi)\,d\xi$$

e sommando i due contributi abbiamo finito.

Secondo caso: Equazione di Korteweg - de Vries linearizzata in tutto $\mathbf{R}$ - Questa equazione rappresenta l'andamento dell'elevazione u della superficie libera in un bacino d'acqua a profondità costante h. Come sarà immediatamente evidente, non si tratta in effetti di una equazione del secondo ordine, ma vale la pena ugualmente di considerarla per la sua grande importanza teorica ed applicativa.

Vogliamo, dunque, risolvere

$$\begin{cases} u_t + Vu_x + \dfrac{Vh^2}{6}u_{xxx} = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Il parametro $V=\sqrt{gh}$ rappresenta la velocità dell'acqua in un bacino di profondità bassa.

Operando come nell'esempio precedente abbiamo

$$\hat{u}' + ikV\hat{u} - i\frac{Vh^2k^3}{6}\hat{u} = 0 \quad \text{dove} \quad \hat{u}(k,t) = \mathcal{F}(u(x,t),k).$$

Facilmente si ricava

$$\hat{u} = C(k)\exp\left[ikVt\left(-1+\frac{h^2k^2}{6}\right)\right].$$

Imponendo infine la condizione iniziale ricaviamo

$$\hat{u} = \hat{f}(k)\exp\left[ikVt\left(\frac{h^2k^2}{6}-1\right)\right].$$

Se ora antitrasformiamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(k)\exp\left[ikVt\left(\frac{h^2k^2}{6}-1\right)\right]\exp(ikx)\,dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(k) \exp ik \left[(x - Vt) + \frac{h^2 k^2}{6} Vt \right] dk.$$

Se $f = \delta$ (funzione impulsiva), grazie al fatto che $\hat{\delta} = 1$, otteniamo

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left[k(x - Vt) + k^3 (\frac{Vth^2}{6}) \right] dk.$$

Terzo caso: Equazione di Laplace nel semipiano - Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) \\ \lim\limits_{\substack{|x| \to \infty \\ y \to +\infty}} u(x,y) = 0. \end{cases}$$

Ancora una volta trasformiamo rispetto alla sola x per ottenere

$$-k^2 \hat{u} + \hat{u}'' = 0$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} \hat{u} = A(k) e^{|k|y} + B(k) e^{-|k|y} \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k), \ \lim\limits_{y \to +\infty} \hat{u}(k,y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(k,y) = \hat{f}(k) e^{-y|k|}.$$

Quindi antitrasformando

$$u(x,y) = f(x) \ *_x \ \frac{y}{\pi} \frac{1}{y^2 + x^2} = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} \, dt$$

dove $*_x$ sta ad indicare che la convoluzione è effettuata rispetto alla variabile x. È la cosiddetta formula integrale di Poisson per il semipiano $y > 0$. Se ad esempio $f(t) = H_0 \chi_{[-a,a]}$ (con H_0 costante), facilmente si ottiene

$$u(x,y) = \frac{H_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right] = \frac{H_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Se u ha il significato di temperatura nello stato stazionario, le linee isoterme si ottengono dove

$$\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2aCy + a^2 C^2 = a^2 (C^2 + 1)$$

che sono archi di circonferenza che intersecano l'asse delle x nei punti $\pm a$.

Quarto caso: Problema di Cauchy per l'equazione del calore in tutto R - Risolviamo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Operando come al solito, si ricava

$$\hat{u}' + k^2 \hat{u} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{u} = C(k) e^{-k^2 t}.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$\hat{u} = \hat{f}(k)\, e^{-k^2 t}.$$

Sapendo che $e^{-tk^2} = \mathcal{F}(\sqrt{\frac{1}{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}})$, abbiamo

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \,*_x\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy.$$

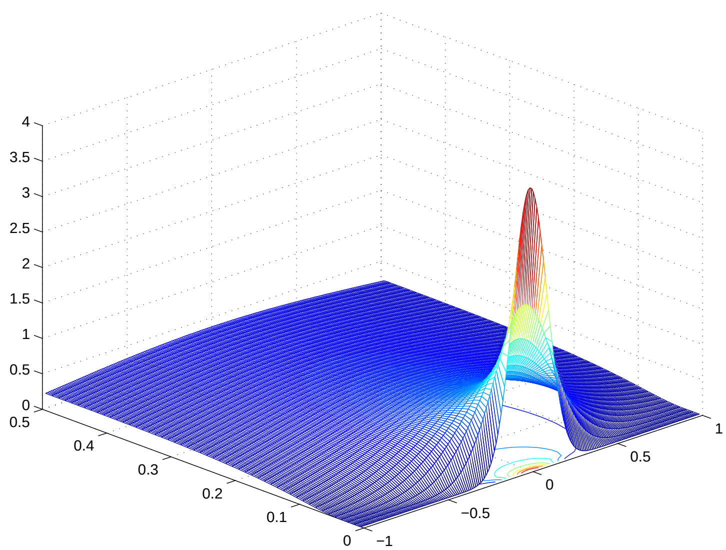
Usualmente la funzione

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

è detta la soluzione fondamentale dell'equazione del calore su $\mathbf{R}$. Se, come già nel secondo caso, consideriamo $f = \delta$, otteniamo proprio

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

il cui grafico è riportato sotto in figura con $t \in [0, 1.5]$.



Osserviamo che il valore massimo decresce (in accordo con il principio del massimo considerato nella Sezione 9), ma la gaussiana si allarga sempre di più.

Rispetto al metdoo precedente, in un certo senso il ruolo delle variabili è invertito: trasformiamo rispetto al tempo, mentre x è trattato alla stregua di un parametro. Osserviamo, inoltre, che concordemente a quanto si fa di solito con la trasformata di Laplace, la funzione u è assunta nulla per $t < 0$.

Primo caso: Problema di Cauchy per l'equazione del calore nella semiretta $\mathbf{R}_+$ - Risolviamo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = 0 \quad \text{in } \ x \geq 0 \\ u(0,t) = F(t) \quad \text{in } \ t > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{in } \ t > 0 \end{cases}$$

Trasformiamo la u rispetto alla sola variabile t e poniamo

$$v(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t),s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t)\, dt.$$

Assumiamo, inoltre, u di classe C^1 rispetto a t e di classe C^2 rispetto a x. Abbiamo perciò

$$\mathcal{L}u_t = s\mathcal{L}u - u(x,0) = sv(x,s),$$

$$\mathcal{L}u_{xx} = \int_0^{+\infty} e^{-st} u_{xx}\, dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t)\, dt = v''(x,s).$$

Perciò, tenendo conto anche delle condizioni al contorno e della possibilità di scambiare limite con integrale di Laplace, ci riduciamo alla soluzione del problema

$$\begin{cases} v'' - sv = 0 \\ v(0,s) = f(s), \ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x,s) = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$v(x,s) = f(s) e^{-\sqrt{s}x}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Ricordando che

$$e^{-x\sqrt{s}} = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, s\right)$$

otteniamo

$$u(x,t) = F(t) \ *_t \ \frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} =$$

$$= \int_0^t \frac{x}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} F(t-\tau)\, d\tau = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} F(t-\tau)\, d\tau.$$

In particolare se $F(t) = T_0$ costante, ricaviamo

$$u(x,t) = \frac{T_0 x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{3/2}}\, d\tau.$$

Se effettuiamo il cambiamento di variabile $\lambda = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}$, ricaviamo

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} 4\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

ed è chiaro che per $t \to +\infty$ abbiamo

$$u(x,t) \;\to\; \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = T_0,$$

come è logico aspettarsi. Infatti, da un punto di vista fisico, se un estremo di una barra infinita è mantenuto a temperatura T_0 costante, a regime tutta la barra avrà la medesima temperatura.

Secondo caso: Problema di Cauchy per l'equazione del calore in un mezzo finito - Risolviamo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \;]0,a[\times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = 0 & \text{in } \; 0 < x < a \\ u(0,t) = V & \text{in } \; t > 0 \\ u_x(a,t) = 0 & \text{in } \; t > 0 \end{cases}$$

dove V è una costante. È da osservare che l'ultima condizione esprime il fatto che il flusso uscente dal mezzo nell'estremo $x = a$ è nullo. Lavorando come nell'esempio precedente e tenendo conto delle condizioni al contorno abbiamo

$$\begin{cases} v'' - sv = 0 \\ v(0,s) = \dfrac{V}{s} \\ v'(a,s) = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$v = \frac{V}{s}\cosh\sqrt{s}\,x - \frac{V\sinh\sqrt{s}\,a}{s\cosh\sqrt{s}\,a}\sinh\sqrt{s}\,x =$$

$$= \frac{V(\cosh\sqrt{s}\,x\cosh\sqrt{s}\,a - \sinh\sqrt{s}\,x\sinh\sqrt{s}\,a)}{s\cosh\sqrt{s}\,a} = \frac{V\cosh\sqrt{s}(a-x)}{s\cosh\sqrt{s}\,a}.$$

Per ricavare l'espressione della u, si tratta ora di antitrasformare, ricordando che

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} v(x,s)\, ds$$

con $c > 0$ arbitrario. Utilizzando il Teorema dei Residui ed il Lemma di Jordan otteniamo

$$u(x,t) = V\left[1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)(a-x)\pi}{2a}\, \exp(-(2n-1)^2(\frac{\pi}{2a})^2 t)\right].$$

Al medesimo risultato saremmo arrivati applicando il metodo di separazione delle variabili.

Terzo caso: Problema di Cauchy per la corda vibrante di lunghezza infinita - Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = Q(x,t) \qquad \text{in} \;\; \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{in} \;\; \mathbf{R} \\ u_t(0,t) = g(x) \quad \text{in} \;\; \mathbf{R} \end{cases}$$

che abbiamo già risolto esplicitamente nella Sezione 9. Qui arriviamo alla soluzione utilizzando la trasformata di Laplace. In questo caso applichiamo congiuntamente la trasformata di Fourier in x e la trasformata di Laplace in t e poniamo

$$v(k,s) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ikx}\, dx \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t)\, dt.$$

In altri termini

$$v(k,s) = \mathcal{L}_t(\mathcal{F}_x(u(x,t),k),s).$$

Abbiamo

$$\mathcal{LF}(u_{tt}) = s^2 v - s\mathcal{F}(u,0) - \mathcal{F}(u_t,0) = s^2 v - s\hat{f}(k) - \hat{g}(k),$$

$$\mathcal{LF}(u_{xx}) = -k^2 v.$$

Quindi

$$s^2 v(k,s) - s\hat{f}(k) - \hat{g}(k) + V^2 k^2 v = q(k,s),$$

$$(s^2 + V^2 k^2) v(k,s) = s\hat{f}(k) + \hat{g}(k) + q(k,s),$$

$$v(k,s) = \frac{s\hat{f}(k) + \hat{g}(k) + q(k,s)}{s^2 + V^2 k^2}.$$

Per ricavare la soluzione, antitrasformiamo un passo alla volta. Se $\hat{u}(k,t) = \mathcal{L}^{-1} v(k,s)$ otteniamo

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) \cos kVt + \frac{\hat{g}(k)}{kV} \sin kVt + \frac{1}{kV} \mathcal{L}^{-1}\{q(k,s) \frac{kV}{s^2 + k^2 V^2}\} =$$

$$= \hat{f}(k) \cos kVt + \frac{\hat{g}(k)}{kV} \sin kVt + \frac{1}{kV} \int_0^t \hat{Q}(k,\tau) \sin kV(t-\tau)\, d\tau.$$

Infine

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ikVt} + e^{-ikVt}}{2} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ikVt} - e^{-ikVt}}{2i} \frac{\hat{g}(k)}{kV} e^{ikx}\, dk +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2V} \int_0^t \hat{Q}(k,\tau) \frac{e^{ikV(t-\tau)} - e^{-ikV(t-\tau)}}{ik} e^{ikx}\, dk =$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+Vt)+f(x-Vt)] + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2V}\left(\int_{x-Vt}^{x+Vt} e^{iky}\,dy\right)\hat{g}(k)\,dk +$$

$$+\frac{1}{2V}\int_0^t \left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{x-V(t-\tau)}^{x+V(t-\tau)} e^{iky}\,dy\right)\hat{Q}(k,\tau)\,dk\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+Vt)+f(x-Vt)] + \frac{1}{2V}\int_{x-Vt}^{x+Vt} g(y)\,dy + \frac{1}{2V}\int_0^t \left(\int_{x-V(t-\tau)}^{x+V(t-\tau)} Q(y,\tau)\,dy\right)d\tau.$$

Quarto caso: Problema di Cauchy per l'equazione delle onde nella semiretta $\mathbf{R}_+$ - Risolviamo

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = 0 \qquad \text{in } \ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{in } \ x \geq 0 \\ u(0,t) = AF(t) \quad \text{in } \ t > 0 \\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{in } \ t > 0 \end{cases}$$

Trasformando nella sola t come negli esempi 1 e 2 e tenendo conto delle condizioni al contorno, otteniamo

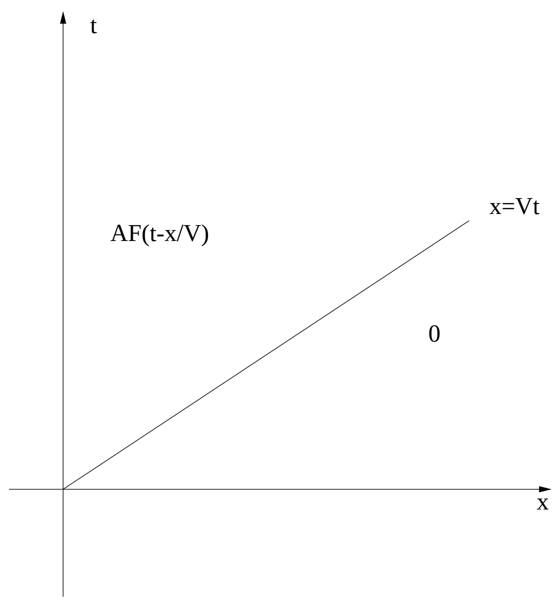
$$\begin{cases} v'' - \dfrac{s^2}{V^2} s = 0 \\ v(0,s) = Af(s), \quad v(+\infty, s) = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$v(x,s) = Af(s)e^{-\frac{s}{V}x}.$$

Antitrasformando otteniamo

$$u(x,t) = AF(t - \frac{x}{V})H(t - \frac{x}{v}) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,t) = \begin{cases} AF(t - \dfrac{x}{V}) \qquad \text{se } \ x \leq Vt \\ 0 \qquad \text{se } \ x > Vt. \end{cases}$$



Dalla figura sopra risalta bene il comportamento di u come di un'onda che si propaga sulla semiretta $[0,+\infty[$ al crescere del tempo. Inoltre le condizioni di compatibiità richiedono che

$$AF(0) = u(0,0) = 0,$$

$$AF'(0) = u_t(0,0) = 0$$

e quindi la soluzione è almeno di classe C^1.