

11. EQUAZIONI QUASILINEARI DEL PRIMO ORDINE

Una equazione quasilineare del primo ordine in due variabili è una espressione del tipo

$$(1) \quad a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

dove x e y variano in un aperto $A \subset \mathbf{R}^2$ e i coefficienti a, b, c sono funzioni regolari del loro argomento.

Se introduciamo il vettore (*vettore caratteristico*)

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

è chiaro che la relazione precedente si può scrivere come

$$\vec{v} \cdot (u_x, u_y, -1) = 0.$$

Poichè il vettore $(u_x, u_y, -1)$ rappresenta la direzione normale alla superficie S grafico della funzione $u = u(x, y)$, possiamo dire che u è soluzione della (1), se e solo se il vettore caratteristico è contenuto nel piano tangente alla superficie grafico. Per questo motivo diciamo che $S = \text{graf}(u)$ è una *superficie integrale* per la (1).

Se riferiamo le linee caratteristiche (ossia le linee la cui tangente in ogni punto coincide con la direzione del vettore caratteristico) al parametro t , esse sono definite dal sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \end{cases}$$

Osserviamo che la soluzione di questo sistema differenziale dipende da tre costanti arbitrarie ed in generale, dunque, riempie lo spazio. Inoltre vale il seguente risultato, di cui omettiamo la semplice dimostrazione.

Proposizione 1. - *Sia S una superficie integrale per la (1). Se una linea caratteristica λ ha in comune con S un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la caratteristica medesima giace interamente su S .*

Questo ci dice che una superficie integrale S è costituita da una semplice infinità di linee caratteristiche, le quali, per il teorema di esistenza ed unicità del sistema (2), godono chiaramente delle seguenti proprietà:

- a) due linee caratteristiche non hanno punti in comune;
- b) per un punto arbitrario di S passa una ed una sola caratteristica.

Tutto questo ci permette di risolvere rapidamente, con semplici considerazioni di carattere geometrico, il problema di Cauchy per la (1), che consiste nell'indicare una linea L di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$

che sia contenuta nella superficie S . In altri termini, cerchiamo una funzione $z = u(x, y)$ tale che $h(s) = u(f(s), g(s))$. Frequentemente la variabile y assume il significato di variabile temporale; in tal caso si parla anche di problema ai valori iniziali e si assegna, allora, $u(x, 0) = h(x)$, che equivale, nella notazione precedente, a porre

$$\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = h(s). \end{cases}$$

Geometricamente questo significa che la linea L è assegnata nel piano xz .

Assumiamo, dunque, che le funzioni f, g, h siano di classe C^1 nell'intervallo $[0, 1]$ e che

$$(3) \quad f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Geometricamente questo equivale a richiedere che siano regolari sia la linea L sia la sua proiezione L_0 sul piano xy . Inoltre la (3) equivale a supporre che in nessun punto della L la tangente sia parallela all'asse delle z e questo riflette la condizione che in nessun punto di L il piano tangente è parallelo all'asse delle z (in tal caso, infatti, u_x e u_y non potrebbero essere continue).

Richiediamo, inoltre, che le funzioni a, b, c siano di classe C^1 in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ che contiene la curva L .

Noi cerchiamo, dunque, una funzione $z = u(x, y)$ che sia una soluzione locale del Problema di Cauchy per la (1), ossia che sia definita in un intorno della L . Per quanto detto sopra, la soluzione è data dalla soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t, s) = a(x(t, s), y(t, s), z(t, s)), & x(0, s) = f(s) \\ \frac{d}{dt}y(t, s) = b(x(t, s), y(t, s), z(t, s)), & y(0, s) = g(s) \\ \frac{d}{dt}z(t, s) = c(x(t, s), y(t, s), z(t, s)), & z(0, s) = h(s). \end{cases}$$

Osserviamo innanzi tutto che la (4) definisce effettivamente una superficie regolare se il vettore $P_t \wedge P_s$ non si annulla mai nell'insieme di definizione delle variabili s e t . Questa condizione equivale ad affermare che in ogni punto il piano tangente è ben definito.

Analiticamente abbiamo

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_t & y_t & z_t \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} y_t & z_t \\ y_s & z_s \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_t & x_t \\ z_s & x_s \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix} \vec{k} \neq 0. \end{aligned}$$

Tuttavia, se vogliamo mettere la nostra superficie nella forma $z = u(x, y)$, una condizione sufficiente fornita dal Teorema di Dini garantisce che basta assumere

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x_t(0, s) & y_t(0, s) \\ x_s(0, s) & y_s(0, s) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Dal momento che le x e y sono di classe C^1 , per il Teorema della permanenza del segno la condizione (5) garantisce che ci si può porre nella forma $z = u(x, y)$ in tutto un intorno della linea L .

Tenendo conto della (4), la (5) si riscrive come

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a(f(s), g(s), h(s)) & b(f(s), g(s), h(s)) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Geometricamente la (6) esprime il fatto che la proiezione L_0 della linea L sul piano xy e la proiezione v_0 del vettore caratteristico sullo stesso piano non devono essere mutualmente tangenti. Ritroviamo, dunque, anche in questo contesto la condizione già vista per le equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine, per cui le linee che portano i dati non devono essere tangenti in alcun punto alle linee caratteristiche.

Osserviamo che la (6) è di importanza assolutamente fondamentale: nel caso non valga, infatti, non è possibile garantire l'esistenza e/o l'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy per la (1).

Se abbiamo a che fare con una equazione lineare

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y)$$

si ripete pari pari tutto il discorso precedente, tenendo conto che le linee caratteristiche risolvono

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t, s) = a(x(t, s), y(t, s)), & x(0, s) = f(s) \\ \frac{d}{dt}y(t, s) = b(x(t, s), y(t, s)), & y(0, s) = g(s) \\ \frac{d}{dt}z(t, s) = c(x(t, s), y(t, s))z(t, s) + d(x(t, s), y(t, s)), & z(0, s) = h(s). \end{cases}$$

Quanto fatto finora, dunque, prova l'esistenza della soluzione. La sua unicità segue dal fatto che ogni altra superficie integrale passante per L dovrebbe contenere le caratteristiche che intersecano L e quindi forzatamente coincide con quanto testè trovato.

Sinteticamente, dunque, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 1. - *Supponiamo che f, g, h siano funzioni di classe C^1 nell'intervallo $[0, 1]$ e soddisfino $f'(s)^2 + g'(s)^2 > 0$ per ogni $s \in [0, 1]$. Supponiamo, inoltre, che a, b, c siano funzioni di classe C^1 in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ che contiene la linea L parametrizzata da f, g e h . Supponiamo, inoltre, che per ogni $s \in [0, 1]$ risulti*

$$g'(s)a(f(s), g(s), h(s)) - f'(s)b(f(s), g(s), h(s)) \neq 0.$$

Allora esiste unica in un intorno della linea L la soluzione del Problema di Cauchy per la (1) assegnato lungo la stessa L .

Osservazione 1. - È chiaro che l'intervallo $[0, 1]$ richiesto per la s può equivalentemente essere sostituito da qualunque altro intervallo chiuso e limitato. Inoltre quanto fatto qui per il caso delle due variabili può essere generalizzato ad un numero arbitrario di variabili ■.

Osservazione 2. - Il metodo considerato (dovuto originariamente a Cauchy) fornisce una soluzione locale del Problema di Cauchy per la (1), ossia la superficie integrale S è definita solo in un intorno della L . Ci si potrebbe chiedere se questo sia solo un limite derivante dal metodo utilizzato o se esprima, invece, una situazione più generale. Come mostreremo nel prossimo esempio, è facile rendersi conto che si tratta di una conseguenza diretta ed ineliminabile della non linearità dell'equazione ■.

Esempio. - Consideriamo l'equazione quasi lineare

$$(8) \quad uu_x + u_y = 0$$

nota come *equazione di Burgers*. Se interpretiamo la variabile y come tempo, si tratta di un esempio monodimensionale molto semplice di legge di conservazione: si può porre, infatti, nella forma

$$u_y + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0$$

che è appunto tipica per le leggi di conservazione. Se, inoltre, leggiamo x come la variabile spaziale di un problema monodimensionale e $u(x, y)$ come un campo di velocità lungo l'asse x (ossia $u = \frac{dx}{dy}$), osserviamo che possiamo riscrivere

$$\frac{d}{dy}u(x(y), y) = u_x \frac{dx}{dy} + u_y = uu_x + u_y = 0$$

e quindi ogni particella si muove con velocità costante, dal momento che l'accelerazione è nulla. Detto in altri termini, u è costante lungo le linee $x = x(y)$ proiezioni delle caratteristiche nel piano xy .

Se $h(x) = u(x, 0)$ descrive la distribuzione iniziale di velocità, la soluzione del Problema di Cauchy per la (8) è data da

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t, s) = z(t, s), & x(0, s) = s \\ \frac{d}{dt}y(t, s) = 1, & y(0, s) = 0 \\ \frac{d}{dt}z(t, s) = 0, & z(0, s) = h(s) \end{cases}$$

da cui traiamo

$$\begin{cases} x = s + zt \\ y = t \\ z = h(s) \end{cases}$$

che fornisce la soluzione in forma implicita

$$u = h(x - uy).$$

Come dicevamo sopra, la funzione u ha il valore costante $u = h(s)$ lungo la proiezione C_s della caratteristica nel piano xy che passa per il punto $(0, s)$ e che ha equazione

$$(9) \quad x = s + h(s)y$$

Fisicamente la (9) rappresenta la legge oraria di una particella che all'istante $y = 0$ occupa la posizione $x_0 = s$.

Due diverse caratteristiche C_{s_1} e C_{s_2} si intersecano nel punto (x, y) dato dalla soluzione del sistema

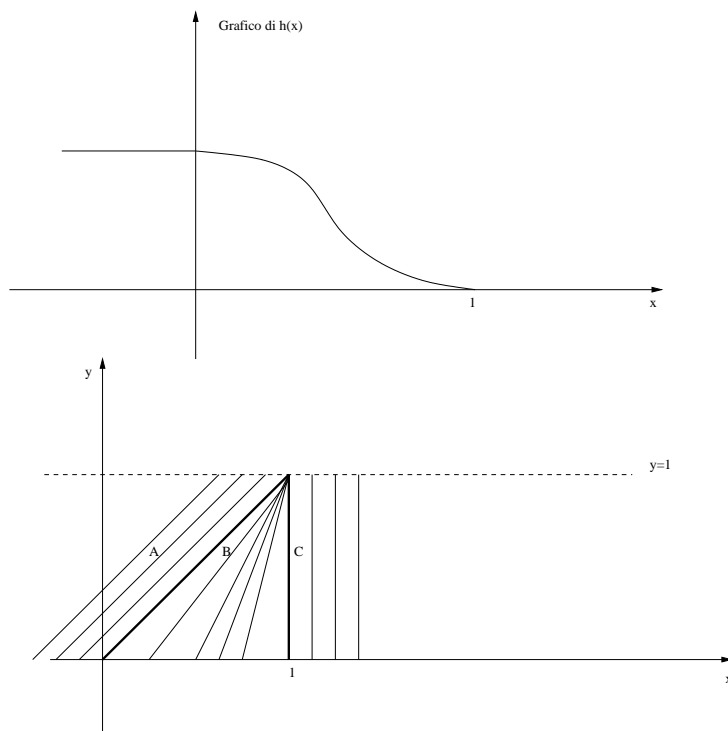
$$\begin{cases} x = s_1 + h(s_1)y \\ x = s_2 + h(s_2)y \end{cases}$$

da cui in particolare si ricava

$$(10) \quad \bar{y} = -\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}.$$

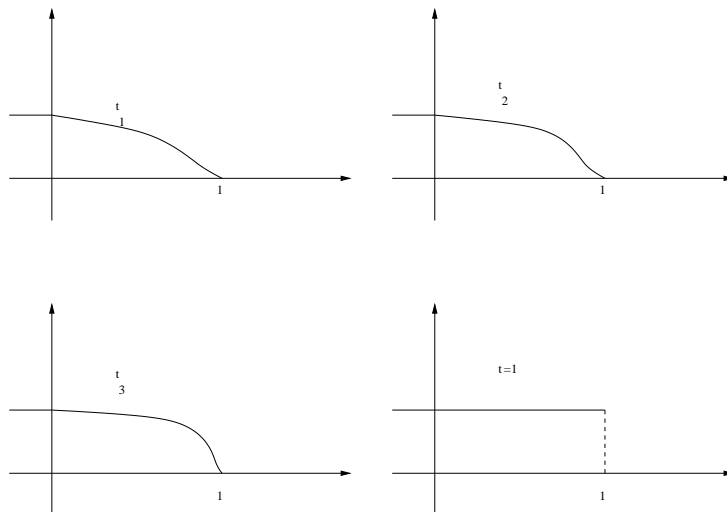
Dal momento che siamo interessati alla soluzione per $y > 0$, qualora h sia una funzione crescente, il valore fornito dalla (10) è negativo e non crea alcun problema. Nel caso, invece, h sia decrescente, allora la (10) indica l'esistenza di un valore di y per cui la u diviene singolare. Questo è evidente da un punto di vista analitico, perchè in \bar{y} si intersecano due rette lungo le quali u assume due valori distinti. Fisicamente questo corrisponde al fatto che una particella più veloce collide con una più lenta che le sta davanti.

Possiamo rappresentare questo fenomeno graficamente.



Se consideriamo la regione $0 \leq t \leq 1$, in A le proiezioni delle caratteristiche hanno tutte pendenza 1 e lungo di esse la funzione u vale 1; in C le proiezioni hanno pendenza infinita e la soluzione vale costantemente 0; in B osserviamo che gli intervalli in x nei quali u decresce da 1 a 0 si fanno sempre più piccoli al crescere di t fino a che nel punto $(1, 1)$ una soluzione continua non può più esistere.

Possiamo rappresentare la u ad istanti successivi, per cogliere ancor meglio la natura del fenomeno.



La natura della singolarità è ancora più chiara se seguiamo i valori della derivata $u_x(x, y)$ lungo la (9). Da $u = h(x - uy)$ otteniamo

$$u_x = h'(x - uy)(1 - u_x y)$$

e tenendo conto che ci muoviamo lungo la caratteristica ricaviamo

$$u_x = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)}.$$

Se, dunque, il dato iniziale è decrescente ($h'(s) < 0$), u_x esplose per $y = -\frac{1}{h'(s)}$ il cui valore minimo corrisponde al valore $s = s_0$ in cui h ha un minimo. Possiamo, perciò concludere che al tempo $T = -\frac{1}{h'(s_0)}$ la soluzione mostra il cosiddetto *blow up* e non possono più esistere soluzioni di classe C^1 oltre T . Questo conferma l'esistenza puramente locale (in tempo) della soluzione (problema che ha motivato l'introduzione di questo esempio). D'altro canto, poichè in natura esistono fenomeni discontinui che presentano la permanenza di singolarità del tipo ora incontrato, l'esempio mostra la necessità di introdurre un nuovo concetto di soluzione, che permetta di affrontare adeguatamente il problema. Tutto ciò, peraltro, esce dai limiti del corso.

Osserviamo infine che il comportamento ora osservato può essere generalizzato al caso di equazioni del tipo

$$u_y + a(u)u_x = 0$$

pressochè con il medesimo tipo di conclusioni.