2. Alcune equazioni del primo ordine integrabili

Consideriamo alcune classi di equazioni per le quali è possibile calcolare esplicitamente l'integrale generale. Naturalmente si tratta solo di alcuni esempi fra i più comuni nelle applicazioni e non c'è alcuna pretesa di discutere qui tutti tipi di equazioni che si portano a quadratura.

Caso I. - - **Equazioni lineari del primo ordine.** Sono un particolare tipo di equazioni in forma normale

$$y'(x) = \varphi(x)y(x) + \psi(x) \qquad \varphi(x),\ \psi(x) \in C^0([a,b]).$$

L'equazione si chiama *lineare* perchè è un polinomio di primo grado in $y(x)$ e $y'(x)$. La funzione $\varphi(x)$ è detta *coefficiente dell'incognita*, mentre $\psi(x)$ è il *termine noto*. Se $\psi(x) = 0$ l'equazione si dice *omogenea*, mentre se $\psi(x) \neq 0$ parliamo di equazione *completa*. La formula risolutiva dell'equazione lineare è dovuta a Leibnitz. Riportiamo qui sotto il suo procedimento, che ha inevitabilmente un aspetto un po' artificioso. La struttura della soluzione sarà, invece, molto più chiara, dopo aver studiato sistemi ed equiazioni lineari di ordine arbitrario. Scriviamo, dunque, l'equazione nella forma

$$y'(x) - \varphi(x)y(x) = \psi(x)$$

e moltiplichiamo ambo i membri per la quantità positiva $e^{-\int \varphi(x)\,dx}$, ottenendo

$$e^{-\int \varphi(x)\,dx}(y'(x) - \varphi(x)y(x)) = e^{-\int \varphi(x)\,dx}\psi(x),$$

cioè anche

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-\int \varphi(x)\,dx}\right) = e^{-\int \varphi(x)\,dx}\psi(x).$$

Integrando termine a termine, otteniamo

$$y(x)e^{-\int \varphi(x)\,dx} = C + \int \psi(x)e^{-\int \varphi(x)\,dx}\,dx$$

da cui concludiamo

$$y(x) = y(x,C) = e^{\int \varphi(x)\,dx}\left(C + \int \psi(x)e^{-\int \varphi(x)\,dx}\,dx\right).$$

Si constata direttamente dalla formula risolutiva che fornisce l'espressione dell'integrale generale che tutte le linee integrali $y = y(x,C)$ sono di classe C^1 nell'intero intervallo di continuità per φ e ψ. Al medesimo risultato si può arrivare applicando il Teorema di esistenza ed unicità in grande considerato nella Sezione precedente.

Caso II. - - **Equazioni di Bernoulli.** È forse il caso più semplice di equazioni del primo ordine in forma normale non lineare. Abbiamo

$$y'(x) = \varphi(x)y(x) + \psi(x)y^{\alpha}(x) \qquad \varphi(x),\ \psi(x) \in C^0([a,b]),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Si escludono i casi

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = [\varphi(x) + \psi(x)]y(x), \quad \text{equazione lineare omogenea,}$$

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \varphi(x)y(x) + \psi(x), \quad \text{equazione lineare completa.}$$

Per $\alpha \neq 0, 1$, l'equazione può essere ricondotta ad una equazione lineare mediante un opportuno cambiamento di funzione incognita, dovuto a Bernoulli (da cui il nome di questa classe di equazioni). Dopo aver considerato a parte la retta $y = 0$, che è integrale per $\alpha > 0$, si assume $y \neq 0$ e si dividono ambo i membri dell'equazione per y^α, ottenendo

$$y^{-\alpha}(x)y'(x) = \varphi(x)y(x)^{1-\alpha} + \psi(x).$$

Posto, quindi,

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) \quad \Rightarrow \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$$

da

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)\varphi(x)y(x)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\psi(x)$$

otteniamo

$$z'(x) = (1-\alpha)\varphi(x)z(x) + (1-\alpha)\psi(x)$$

che è appunto una equazione lineare nella nuova incognita.

Caso III. - - **Equazioni a variabili separabili.** Consideriamo, ora, equazioni nella forma

$$y'(x) = X(x)Y(y).$$

Cerchiamo dapprima soluzioni dell'equazione

$$Y(y) = 0.$$

Le eventuali radici $y = y^*$ sono integrali dell'equazione differenziale. Escluso, quindi, che possa essere $Y(y) = 0$, si separano le variabili (da cui il nome assegnato alla classe di equazioni) e si integra, per ottenere le linee integrali nella forma

$$\int \frac{1}{Y(y)}\,dy = \int X(x)\,dx + C.$$

Si noti che gli integrali così ottenuti sono soluzioni dell'equazione nei rettangoli (eventualmente infiniti) delimitati dalle rette $y = y^*$.

Caso IV. - - **Equazioni omogenee.** Sono equazioni del tipo

$$y'(x) = f(\frac{y(x)}{x}).$$

Si risolvono ponendo

$$t(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \Rightarrow y(x) = x\,t(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = x\,t'(x) + t(x).$$

Sostituendo nell'equazione originale, otteniamo

$$x\,t'(x) + t(x) = f(t(x)) \quad \Rightarrow \quad t'(x) = \frac{f(t) - t}{x}.$$

A questo punto l'equazione è ridotta ad una equazione a variabili separabili e si procede come indicato sopra. In particolare, le soluzioni $t = t^*$ dell'equazione $T(t) = 0$ portano agli integrali (rette per l'origine)

$$y(x) = t^*\,x.$$

Per il resto si separano le variabili e si integra per ottenere

$$\int \frac{1}{f(t) - t}\,dt = \ln(Kx)$$

dove si intende che la costante K ha assorbito il segno della variabile x (in altri termini, $K > 0$ se $x > 0$ e $K < 0$ se $x < 0$). Inoltre, se poniamo

$$\varphi(t) = \int \frac{1}{f(t) - t}\,dt,$$

possiamo dare all'integrale la seguente forma parametrica

$$\begin{cases} x = Ce^{\varphi(t)} \\ y = Cte^{\varphi(t)}. \end{cases}$$

Al variare della costante C, tale forma rappresenta una famiglia di linee omotetiche rispetto all'origine, ossia linee collegate da una corrispondenza per cui
 a) i punti corrispondenti sono allineati con un punto fisso, che è l'origine;
 b) i segmenti corrispondenti sono in rapporto fisso.

Concludiamo la Sezione con alcuni esercizi relativi agli esempi qui considerati.

Esercizio 1) Determinare la linea Γ che gode delle seguenti proprietà:
 a) detta Q l'intersezione con l'asse delle y della tangente a Γ in un generico punto P, il punto medio del segmento PQ descrive la retta $y = x$;
 b) Γ interseca ortogonalmente la retta $y = x - 1$.

Esercizio 2) Integrare l'equazione differenziale

$$x(y'' + 2x) = 2y'.$$

Determinare la linea integrale che soddisfa il problema di Cauchy $y(1) = \frac{2}{9}$, $y'(1) = 0$ e darne un grafico qualitativo nell'intorno del punto $x = 1$.

Esercizio 3) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2}{3}(y - \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}})$$

ed indicare per quali valori della costante arbitraria le linee integrali sono prolungabili su tutto l'asse reale. Determinare, poi, la linea integrale tangente alla curva di equazione $y = e^{-x}$.

Esercizio 4) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{x} y + \frac{x^2 - 1}{x^3} y^2, \qquad x > 0$$

e determinare il valore della costante arbitraria tale che l'integrale particolare ammetta un solo asintoto verticale.

Esercizio 5) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{2} \frac{y}{x} + (\log^3 x) \sqrt[3]{y}, \qquad x > 0$$

e risolvere il problema di Cauchy $y(1) = 0$, giustificando la non unicità della soluzione.

Esercizio 6) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = (4y + 16y^2) \sin x$$

e determinare la linea integrale tangente a $y = \frac{\cos x}{4}$, indicando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Era possibile prevederne l'ampiezza a priori?

Esercizio 7) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}} + 1$$

e verificare che tutte le linee integrali incontrano l'asse delle x formando con esso un angolo costante α. Determinare, in particolare, la linea integrale tangente nel punto di intersezione con l'asse delle x alla retta di equazione $y = \tan \alpha (x - 1)$.

Esercizio 8) Integrare l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} \left(\sqrt{\left(\log \frac{y}{x} \right) - 1} + 1 \right), \qquad xy \neq 0.$$

Dato, poi, $y(1) = \lambda$, dire per quali valor di λ il problema ammette soluzioni e per quali valori tale soluzione è unica.