Precorsi di matematica

Francesco Dinuzzo

12 settembre 2005

1 Insiemi

Il concetto di base nella matematica moderna è l' *insieme*. Un insieme è una collezione di *elementi*. Gli elementi di un insieme vengono elencati all'interno di una coppia di parentesi graffe ("{" e "}"). Ad esempio, l'insieme dei primi 4 numeri naturali dispari è denotato da $\{1, 3, 5, 7\}$ mentre l'insieme delle stagioni dell'anno è $\{autunno, inverno, primavera, estate\}$.

Spesso, conviene indicare l'insieme con un simbolo speciale che, di solito, è una lettera maiuscola. Ad esempio poniamo

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

oppure

$$B = \{autunno, inverno, primavera, estate\}$$

L'appartenenza di un elemento ad un insieme è indicata con il simbolo "$\in$". Ad esempio $3 \in A$, $estate \in B$. Per indicare, invece, la non-appartenenza di un elemento ad un insieme scriviamo $2 \notin A$, $3 \notin B$.

Distiguiamo tra *insiemi finiti* e *insiemi infiniti* a seconda che un insieme contenga un numero finito o infinito di elementi. Ad esempio, gli insiemi A e B introdotti precedentemente sono insiemi finiti. Esempi di insiemi infiniti sono l'insieme dei *numeri naturali*:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

oppure l'insieme dei numeri interi:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Se un certo insieme X è un insieme finito, chiamiamo *cardinalità* di X il numero dei suoi elementi e la denotiamo con il simbolo $\#X$ (si legge "cardinalità di X").

A volte, piuttosto che elencare gli elementi di un insieme può essere conveniente descrivere un insieme in termini delle sue *proprietà*. Ad esempio:

$$A = \{p : p \text{ è un numero primo positivo}\}$$

oppure

$$A = \{x : x \text{ è un numero naturale pari compreso tra 1 e 7}\}.$$

Strano, ma vero, uno degli insiemi più importanti è l'*insieme vuoto*, ovvero l'insieme che non contiene nessun elemento. Esso è denotato dal simbolo $\emptyset$ ed è l'unico insieme la cui cardinalità è pari a 0.

Esistono molte operazioni che possono essere effettuate sugli insiemi: le più note e importanti sono l'*unione*, l'*intersezione* e il *complemento*.

Se A e B sono due insiemi, l'*unione* di A e B viene indicata con $A \cup B$ ed è l'insieme i cui elementi appartengono ad A oppure a B oppure ad entrambi.

Analogamente, l'*intersezione* di due insiemi A e B viene indicata con $A \cap B$ ed è l'insieme i cui elementi appartengono sia ad A che a B.

Per definire l'operazione di *complemento* per un certo insieme A dobbiamo prima definire un *insieme universo* per A. L'insieme universo U è semplicemente un insieme più grande contenente A. Detto ciò, il complemento di A in U si denota con A^c ed è l'insieme degli elementi appartenenti a U ma non ad A.

Può sembrare che il complemento sia un'operazione che agisce su un solo insieme (l'insieme A). In realtà, il complemento non è che un caso particolare dell'operazione (binaria) di *differenza*. La differenza tra due insiemi A e B si indica con $A - B$ ed è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B. Normalmente, tuttavia, si sottintende che gli insiemi A e B appartengano allo stesso insieme universo: in questo caso abbiamo l'importante relazione

$$A - B = A \cap B^c$$

la quale mostra che la differenza tra due insiemi appartenenti allo stesso universo può, in realtà, essere espressa in termini di intersezione e complemento.

La *differenza simmetrica* di due insiemi A e B si denota con $A \triangle B$ ed è definita come l'insieme degli elementi che appartengono ad A oppure a B ma non ad entrambi. Equivalentemente, si può scrivere:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Inoltre, se A e B appartengono allo stesso universo si ha:

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

per cui la differenza simmetrica può essere espressa in termini di unione, intersezione e complemento.

L'ultima operazione sugli insiemi che introduciamo è il *prodotto cartesiano.* Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B si denota con $A \times B$ ed è un insieme i cui elementi sono *coppie ordinate* (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$ si ha: $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

Dopo aver introdotto le principali operazioni insiemistiche, vediamo come due insiemi A e B possono essere confrontati.

Diciamo che due insiemi A e B sono *uguali* (e scriviamo $A = B$) se contengono esattamente gli stessi elementi. Se A e B non sono uguali scriviamo $A \neq B$.

Diciamo che A è un *sottoinsieme* di B (e scriviamo $A \subseteq B$) se tutti gli elementi di A appartengono a B. Notiamo che:

$$A = B \qquad \text{se e solo se} \qquad A \subseteq B, B \subseteq A$$

Per convenzione, si assume che l'insieme vuoto sia sottoinsieme di tutti gli insiemi.

Se $A \subseteq B$ ma $A \neq B$, B contiene almeno un elemento che non appartiene ad A. In questo caso, diciamo che A è un *sottoinsieme proprio* di B (e scriviamo $A \subset B$). L'insieme vuoto è sottoinsieme proprio di tutti gli insiemi non vuoti. Diciamo che due insiemi A e B sono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

Se abbiamo N insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_N$ la condizione

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N = \emptyset$$

non garantisce che non ci siano due insiemi con elementi in comune. Per ottenere ciò, richiediamo che gli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ siano *disgiunti a coppie*, cioè che prendendo una qualunque coppia di insiemi ed effettuandone l'intersezione si ottiene l'insieme vuoto.

Sia A un insieme. Una *partizione finita* di A è una collezione di insiemi non vuoti e disgiunti a coppie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tali che:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Infine, l' *insieme delle parti* di A è l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A. Ad esempio, l'insieme delle parti di $A = \{1, 2, 3\}$ è dato da

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Veniamo ora alle proprietà delle operazioni definite in precedenza: esse possono essere *dimostrate* mediante *ragionamento diretto* a partire dalle definizioni, mediante i *diagrammi di Venn* oppure mediante le *tabelle di verità*.

Tutte le operazioni definite, tranne il complemento, sono operazioni binarie. Se vogliamo formare espressioni contenenti più di due insiemi dobbiamo usare le parentesi per specificare la precedenza. Tuttavia, si può evitare di usare le parentesi quando le operazioni sono *associative*.

L'unione, l'intersezione, la differenza simmetrica e il prodotto cartesiano sono operazioni associative, cioè:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Dunque hanno senso le espressioni (usate anche in precedenza) del tipo:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

$$A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$$

Si usa spesso anche la scrittura A^N per indicare:

$$\underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{N}$$

L'unione, l'intersezione e la differenza simmetrica sono *commutative*, cioè:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \qquad A \triangle B = B \triangle A$$

Siccome l'unione, l'intersezione e la differenza simmetrica sono sia associative che commutative, è possibile utilizzare notazioni compatte per esprimere lunghe catene di operazioni. Tali notazioni prevedono la definizione preliminare di un *insieme di indici* I (ad esempio $I = \{1, 2, 3, 4\}$) dopodichè si può scrivere:

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

oppure

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

per indicare, rispettivamente, l'unione e l'intersezione di un gruppo di insiemi. La variabile i è l'*indice* e può essere sostituita da qualunque simbolo senza cambiare il significato dell'espressione. Ad esempio:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in I} A_j$$

Se l'insieme di indici I non viene esplicitamente definito, si assume di solito che sia uguale all'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$. In questo caso, si usa indicare soltanto l'indice più piccolo e quello più alto sottintendendo gli indici compresi. Ad esempio:

$$\bigcap_{i=-2}^{10} A_i$$

Notazioni di questo tipo non sono utilizzate soltanto per le operazioni insiemistiche ma anche, in generale, per tutte le operazioni commutative e associative. Si pensi, in particolare, alle notazioni della *sommatoria* o della *produttoria* per indicare, rispettivamente,la somma e il prodotto di numeri:

$$\sum_{i=1}^{30} a_i \qquad \prod_{i\in I} b_i$$

Proseguiamo, però, con le altre proprietà delle operazioni insiemistiche. Le più importanti sono elencate di seguito con riferimento a tre generici insiemi A, B e C. Proprietà *distributiva dell'unione rispetto all'intersezione*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Proprietà *distributiva dell'intersezione rispetto all'unione*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Valgono, inoltre, le *leggi di De Morgan*:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Le leggi di De Morgan sono molto utili e possono essere facilmente generalizzate per N insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_N$:

$$(\bigcap_{i=1}^{N} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{N} (A_i)^c$$

$$(\bigcup_{i=1}^{N} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{N} (A_i)^c$$

1.1 Il Principio di Induzione

All'inizio della sezione abbiano dato la definizione dell'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali.* Sulla base dell'insieme $\mathbb{N}$ si enuncia uno dei concetti più basilari della matematica: il *principio d'induzione.*

Principio di Induzione 1.1 *Sia $P(n)$ una proposizione definita per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se accade che:*

- *P(1) è vera*
- *Quando P(n) vera anche P(n+1) è vera*

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2 Relazioni

Una *relazione* R definita su un insieme A è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$.

Ad esempio, la relazione "$=$" definita sull'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ non è nient'altro che l'insieme $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Alcune relazioni sono più importanti di altre in quanto godono di particolari proprietà. Vediamo alcune di queste proprietà. Sia, dunque, R una relazione sull'insieme A.

Diciamo che R è *riflessiva* se per ogni $a \in A$ si ha $(a, a) \in R$.

Diciamo che R è *simmetrica* se per ogni $a_1 \in A$ e per ogni $a_2 \in A$ si ha $(a_1, a_2) \in R$ se e solo se $(a_2, a_1) \in R$.

Diciamo che R è *antisimmetrica* se per ogni $a_1 \in A$ e per ogni $a_2 \in A$ si ha $(a_1, a_2) \in R$ e contemporaneamente $(a_2, a_1) \in R$ solo se $a_1 = a_2$.

Diciamo che R è *transitiva* se per ogni $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_3 \in A$ si ha $(a_1, a_2) \in R$ e contemporaneamente $(a_2, a_3) \in R$ solo se $(a_1, a_3) \in R$.

Una relazione *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva* è una *relazione d'ordine parziale*.

Una relazione d'ordine parziale in cui per ogni $a_1 \in A$ e per ogni $a_2 \in A$ si ha almeno una delle due inclusioni $(a_1, a_2) \in R$ e $(a_2, a_1) \in R$ è detta *relazione d'ordine totale*. Ad esempio, una relazione d' ordine parziale, nonchè totale, è la relazione "$\leq$" definita sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Un'altra importante relazione d'ordine totale è la relazione "$\subseteq$" definita sull'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A.

Una relazione *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva* è una *relazione d'equivalenza*. Una relazione d'equivalenza si denota spesso con il simbolo "$\sim$". Per indicare che $a_1 \in A$ è *equivalente* ad $a_2 \in A$ si scrive anche $a_1 \sim a_2$.

La *classe di equivalenza* di $a \in A$ si denota con $C(a)$ ed è l'insieme degli elementi di A equivalenti ad a. La classe di equivalenza di un certo elemento a è sempre non vuota perchè perlomeno si ha $a \in C(a)$. Dalle proprietà delle relazioni di equivalenza si deduce, inoltre, che due classi di equivalenza $C(a)$ e $C(b)$ possono essere soltanto coincidenti o disgiunte. Da questo segue che l'insieme delle classi di equivalenza disgiunte degli elementi $a \in A$ formano una partizione di A. Viceversa, data una qualsiasi partizione di A esiste perlomeno una relazione di equivalenza le cui classi d'equivalenza sono gli insiemi della partizione. Infatti, possiamo costruire una relazione di equivalenza in questo modo: due elementi a_1 e a_2 sono equivalenti solo se appartengono allo stesso insieme della partizione. Esempio: la relazione di *uguaglianza* "$=$" è una relazione di equivalenza in un qualunque insieme A perchè valgono le proprietà riflessiva ($a = a$), simmetrica (se $a = b$ allora $b = a$) e transitiva (se $a = b$ e $b = c$ allora $a = c$). Le classi di equivalenza indotte dall'uguaglianza contengono tutte un solo elemento: $C(a) = \{a\}$, $C(b) = \{b\}$, etc. Esse formano, ovviamente, una partizione di A. Un'altro esempio di relazione di equivalenza è la *congruenza modulo* k nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Essa è definita come segue: per ogni $x \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in \mathbb{N}$ si ha $x \sim y$ solo se $x - y$ è un multiplo di k. Un'altra relazione di equivalenza, sempre su $\mathbb{N}$, è la seguente: due numeri sono equivalenti solo se sono entrambi pari o entrambi dispari. Le classi di equivalenza prodotte da quest'ultima relazione sono due: l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari.