12. Introduzione agli Operatori lineari

Consideriamo, ora, due spazi normati X, Y su uno stesso campo K, una varietà lineare $\mathcal{M} \subseteq X$ ed un'applicazione $A : \mathcal{M} \to Y$ t.c.

a) $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2 \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$;

b) $A(\alpha\varphi) = \alpha A(\varphi) \quad \forall \alpha \in K, \forall \varphi \in \mathcal{M}$.

Diciamo allora che A è un <u>operatore lineare</u> in X e a valori in Y ed indichiamo $\mathcal{M}$ con $D_{(A)}$, dominio di A.

Osservazione 1. - Al dominio $D_{(A)}$ non è richiesto di coincidere con tutto X, ma solo di essere una varietà lineare in X.

Consideriamo, ora, alcune definizioni importanti.

Definizione 1. - *Dato $A : D_{(A)} \subseteq X \to Y$, operatore lineare, si chiama <u>range di A</u> il sottoinsieme $\mathcal{R}_{(A)} \subseteq Y$ costituito dalla totalità dei $\psi \in Y$ che sono immagine di qualche $\varphi \in D_{(A)}$.*

Definizione 2. - *Dato $A : D_{(A)} \subseteq X \to Y$, operatore lineare, si chiama <u>nucleo di A</u> il sottoinsieme $\mathcal{N}_{(A)} \subseteq X$ costituito dalla totalità dei $\varphi \in X$ t.c. $A\varphi = 0_Y$.*

Osservazione 2. - Valgono queste proprietà immediate

a) $A0_X = 0_Y$;

b) $A(-\varphi) = -A\varphi \quad \forall \varphi \in D_{(A)}$;

c) $\mathcal{R}_{(A)}$ è una varietà lineare in Y;

d) $\mathcal{N}_{(A)}$ è una varietà lineare in X.

Definizione 3. - *Poichè* $\mathbf{R}$ *e* $\mathbf{C}$ *si possono pensare come spazi normati su se stessi, definiamo funzionale lineare in X un operatore lineare in X a valori in* $\mathbf{R}$ *o in* $\mathbf{C}$.

Dati due spazi normati X e Y su uno stesso campo K, indichiamo con $\mathcal{O}(X, Y)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari in X e a valori in Y. Questa definizione permette una notevole economia di notazione.

Definizione 4. - *Due operatori A e B, essi si dicono uguali e si scrive $A = B$ se $D_{(A)} = D_{(B)}$ e $A\varphi = B\varphi \ \forall \varphi \in D_{(A)}$.*

Definizione 5. - *Dati due operatori $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$, si dice che A è una <u>estensione</u> di B (e si scrive $A \supset B$) se $D_{(A)} \supset D_{(B)}$ e $A\varphi = B\varphi \ \forall \varphi \in D_{(B)}$. Analogamente, data una varietà lineare $\mathcal{M} \subseteq D_{(A)}$, si definisce la <u>restrizione</u> $A|_{\mathcal{M}}$ di A a $\mathcal{M}$.*

Definizione 6. - *Dati due operatori $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$, si chiama somma di B con A e si indica con $A + B$ l'applicazione $A + B : D_{(A)} \cap D_{(B)} \to Y$ definita da $\varphi \mapsto (A + B)\varphi := A\varphi + B\varphi$.*

Definizione 7. - *Dato $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ e $\alpha \in K$ si chiama prodotto di A per α e si indica con αA l'applicazione $\alpha A : D_{(A)} \to Y$ definita da $(\alpha A)\varphi := \alpha(A\varphi)$.*

Osservazione 3. - A rigore i termini somma e prodotto sono un po' impropri, perchè inducono a pensare che $\mathcal{O}(X,Y)$ abbia la struttura di spazio vettoriale. Ciò in generale è falso, in quanto ci sono problemi nella definizione dell'operatore opposto. Su questo aspetto non insistiamo oltre. Tuttavia le cose tornano perfettamente se ci limitiamo a $\mathcal{L}(X,Y) \subseteq \mathcal{O}(X,Y)$, che è l'insieme degli operatori lineari in X e a valori in Y t.c. $D_{(A)} \equiv X$.

Consideriamo, ora, tre spazi normati X, Y, Z su uno stesso campo K. Abbiamo, allora, la seguente

Definizione 8. - *Data una coppia ordinata (A, A') con $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ e $A' \in \mathcal{O}(Y,Z)$ si chiama prodotto di A' con A e si indica con $A'A$ l'applicazione da $D_{(A'A)}$ a Z definita da $\varphi \mapsto (A'A)\varphi := A'(A\varphi)$ dove*

$$D_{(A'A)} := \{\varphi \in X \text{ t.c } \varphi \in D_{(A)} \text{ e } A\varphi \in D_{(A')}\}.$$

Osservazione 4. - In base alla definizione, $A'A$ è ben definito. Verifichiamo che si tratta effettivamente di un operatore lineare.

a) $D_{(A'A)}$ è una varietà lineare in X. Infatti

$$[\varphi, \psi \in D_{(A'A)}] \;\Rightarrow\; [\varphi, \psi \in D_{(A)}, \quad A\varphi, A\psi \in D_{(A')}].$$

Essendo $D_{(A)}$ e $D_{(A')}$ varietà lineari, quanto sopra implica

$$[\forall \alpha, \beta \in K \quad \alpha\varphi + \beta\psi \in D_{(A)} \text{ ed anche } A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi \in D_{(A')}]$$

$$\Rightarrow\; [\alpha\varphi + \beta\psi \in D_{(A'A)}\ \forall \alpha, \beta \in K].$$

b) $\forall \alpha, \beta \in K,\ \varphi, \psi \in D_{(A'A)}$ abbiamo

$$A'A(\alpha\varphi + \beta\psi) = A'(A\alpha\varphi + A\beta\psi) = A'(\alpha A\varphi + \beta A\psi) = \alpha A'A\varphi + \beta A'A\psi \quad \blacksquare.$$

Definizione 9. - *In generale, dati due insiemi S e $\tilde{S}$ ed una applicazione $f : S \to \tilde{S}$, si dice che f è iniettiva se*

$$[x_1, x_2 \in S : f(x_1) = f(x_2)] \;\Rightarrow\; [x_1 = x_2].$$

Ogni volta che abbiamo a che fare con una applicazione iniettiva, possiamo introdurre su $f(S) \subseteq \tilde{S}$ l'applicazione inversa, che ha valori in S. Si indica con f^{-1}. Più precisamente

$$f^{-1} : f(S) \to S$$

$$\tilde{x} \mapsto f^{-1}(\tilde{x}) := x \quad \text{se} \quad f(x) = \tilde{x}.$$

È facile verificare che l'applicazione inversa è ben definita. Dato, ora, un operatore $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ che sia iniettivo, possiamo introdurre il suo inverso

$$A^{-1} : \mathcal{R}_{(A)} \to X$$

$$\psi \mapsto A^{-1}\psi := \varphi \quad \text{se} \quad A\varphi = \psi.$$

Sfruttando la linearità di A e la definizione di A^{-1} è facile vedere che A^{-1} è ben definito.

Diamo, ora, un risultato importante e ben noto che permette di caratterizzare l'invertibilità di un operatore lineare nei termini del suo nucleo.

Proposizione 1. - *Dato $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $\mathcal{N}_{(A)} = \{O_X\}$;

b) $[\varphi, \varphi' \in D_{(A)}, A\varphi = A\varphi'] \;\Rightarrow\; [\varphi = \varphi']$

Dimostrazione. - a) $\Rightarrow$ b) Supponiamo che presi $\varphi, \psi \in D_{(A)}$, risulti $A\varphi = A\psi$. Allora per la linearità deve essere

$$0_Y = A\varphi - A\psi = A(\varphi - \psi).$$

Quindi, per a) abbiamo $\varphi - \psi = 0_X \Rightarrow \varphi = \psi$.

b) $\Rightarrow$ a) Se vale b), scelto $\varphi_1 = 0_X$ (cosa lecita perchè certamente 0_X sta in $D_{(A)}$), supponiamo per assurdo che a) sia falso, ossia che esista $\varphi_2 \neq 0_X$ t.c. $A\varphi_2 = 0_Y$. Allora $A\varphi_2 = A\varphi_1 = A0_X = 0_Y$. Per b) deve essere allora $\varphi_2 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 = 0_X$, cioè a) $\blacksquare$.

Vediamo due esempi estremamente importanti per le applicazioni, in particolare alla Meccanica Quantistica.

Esempio 1A. - Dato lo spazio prehilbertiano $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, (su cui si è posto lo stesso prodotto interno di $L^2(\mathbf{R})$), consideriamo l'operatore

$$\hat{Q} : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}(\mathbf{R})$$

$$f \mapsto \hat{Q}f$$

dove $\hat{Q}f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ e $x \mapsto \hat{Q}f := xf(x)$. L'applicazione è certamente ben definita poichè $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ certamente $xf \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Inoltre è facile vedere che si tratta di un operatore lineare (in questo caso addirittura definito su tutto lo spazio). È facile vedere che $\mathcal{N}_{(\hat{Q})} = \{0_{\mathcal{S}(\mathbf{R})}\}$ e in base al teorema precedente concludiamo che l'operatore $\hat{Q}$ è invertibile.

Esempio 2A. - Dato ancora lo spazio prehilbertiano $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, consideriamo l'operatore

$$\hat{P} : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}(\mathbf{R})$$

$$f \mapsto \hat{P}f$$

dove $\hat{P}f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ e $x \mapsto \hat{P}f := -i\frac{df}{dx}$. L'applicazione è certamente ben definita poichè $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ certamente $-if' \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Inoltre è facile vedere che si tratta di un operatore lineare (ancora definito su tutto lo spazio). Data $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, se $f \in \mathcal{N}_{(\hat{P})} \Rightarrow \hat{P}f = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = 0$ per come sono fatte le funzioni di $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ e in base al teorema precedente possiamo concludere che l'operatore $\hat{P}$ è invertibile.

Gli esempi precedenti hanno un difetto fondamentale. Sono definiti su spazi che non sono completi. L'idea, allora, è di definirli su $L^2(\mathbf{R})$, ovviamente con le dovute cautele (la cosa ha un senso poichè $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$).

Esempio 1B. - Definiamo la funzione $\tau(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con $x \mapsto \tau(x) := x$. Considerato, dunque, $L^2(\mathbf{R})$, definiamo il sottoinsieme

$$D_{(Q)} := \{f \in L^2(\mathbf{R}) : \ \tau f \in L^2(\mathbf{R})\} \subset L^2(\mathbf{R})$$

e l'applicazione

$$Q : D_{(Q)} \to L^2(\mathbf{R})$$
$$f \mapsto Qf := \tau f.$$

L'applicazione ha senso ed è ben definita, in quanto è indipendente dalla scelta del rappresentativo che si assume nella classe di equivalenza (Peraltro <u>non</u> esplicitamente indicata sopra).

Inoltre $D_{(Q)}$ è una varietà lineare in $L^2(\mathbf{R})$ ed è facile concludere che $Q \in \mathcal{O}(L^2(\mathbf{R}))$. Infine, applicando ragionamenti analoghi a quelli che si fanno in $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, si vede che Q (come $\hat{Q}$) è invertibile.

Si può osservare che l'operatore Q (definito in $D_{(Q)}$), è una estensione di $\hat{Q}$ (definito in $\mathcal{S}(\mathbf{R})$). Inoltre, poichè $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$, possiamo certamente concludere che $D_{(Q)}$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$. Scriviamo, come già visto, $Q \supset \hat{Q}$.

Esempio 2B. - Se vogliamo "estendere" $\hat{P}$ a $L^2(\mathbf{R})$ (occorrerà verificare che si tratti effettivamente di una estensione) il discorso è ovviamente più delicato.

Dato, dunque, $L^2(\mathbf{R})$ consideriamo il sottoinsieme

$$D_{(P)} := \{f \in L^2(\mathbf{R}) : \ \exists g \in L^2(\mathbf{R}) \text{ t.c. } \forall x \in \mathbf{R} \ \ f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\, dt\}$$

È chiaro che $D_{(P)} \subseteq L^2(\mathbf{R})$. Certamente la definizione di $D_{(P)}$ è coerente, perchè se $g \in L^2(\mathbf{R})$ allora è sommabile su ogni insieme limitato (basta applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).

Inoltre è stato visto nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue che nelle condizioni precedenti f è continua, derivabile q.o. e risulta $f' = g$ q.o.

Consideriamo, infine, l'applicazione

$$P : D_{(P)} \to L^2(\mathbf{R})$$

$$f \mapsto Pf := -if'.$$

Essa è certamente ben definita. Inoltre, poichè f è continua, nella sua classe d'equivalenza è l'unico rappresentativo che soddisfa la condizione sull'esistenza di g e ciò implica che la classe d'equivalenza per f' è ben definita.

È facile vedere che P è un operatore lineare (in effetti $P \in \mathcal{O}(L^2(\mathbf{R}))$). Facciamo vedere che anche P è invertibile. Al solito basta mostrare che $\mathcal{N}_{(P)} = \{0_{L^2}\}$. Infatti, se $f \in \mathcal{N}_{(P)}$, allora $f \in D_{(P)}$ e $f' = 0_{L^2}$. Allora, anche per la discussione fatta sopra, è $g = f'$ q.o.. Perciò

$$f = f(0) + \int_0^x g(t)\, dt = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt = f(0).$$

Poichè, allora, f è costante e $f \in L^2(\mathbf{R})$, dovrà essere $f \equiv 0 \ \Rightarrow\ f = 0_{L^2}$.

Si potrebbe far vedere che P è effettivamente una estensione di $\hat{P}$ (come già accennato sopra), ma tralasciamo. Scriviamo, dunque, $P \supset \hat{P}$. Inoltre, poichè $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$, possiamo certamente concludere che $D_{(P)}$ è denso in $L^2(\mathbf{R})$.

Esempio 3A. - Considerati $\hat{P}, \hat{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbf{R}), \mathcal{S}(\mathbf{R}))$, si chiama parentesi di commutazione l'operatore

$$[\hat{Q}, \hat{P}] := \hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q}.$$

Ovviamente $[\hat{Q}, \hat{P}] \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbf{R}), \mathcal{S}(\mathbf{R}))$. Facciamo vedere che $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\, 1|_{\mathcal{S}(\mathbf{R})}$, dove con $1|_{\mathcal{S}(\mathbf{R})}$ indichiamo l'operatore unità su $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Infatti, $\forall x \in \mathbf{R}$ e $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ abbiamo

$$[\hat{Q}, \hat{P}]f(x) = (\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q})f(x) = x(-i\frac{d}{dx}f) + i\frac{d}{dx}(xf) = -ixf' + ixf' + if = if.$$

Esempio 3B. - Considerati P e Q definiti in precedenza, si chiama parentesi di commutazione l'operatore $[Q, P] := QP - PQ$. È facile vedere che $[Q, P]$ è un operatore lineare, definito su $D_{([Q,P])}$. Inoltre è immediato mostrare che $[Q, P] \subset i1_{L^2}$ ed anche $[Q, P] = i1_{D_{([Q,P])}}$.

Finora non abbiamo in alcun modo sfruttato la struttura metrica dello spazio normato, ma solo le sue proprietà lineari. Facciamo, ora, questo passo in più.

Definizione 10. - *Dato $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ diciamo che A è continuo se $\forall \varphi_0 \in D_{(A)}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\forall \varphi \in D_{(A)}$ con $\|\varphi - \varphi_0\|_X < \delta_\epsilon$ risulta $\|A\varphi - A\varphi_0\|_Y < \epsilon$.*

La definizione precedente è equivalente a dire che $\forall \varphi_0 \in D_{(A)}$ e $\forall \{\varphi_n\} \subseteq D_{(A)}$ t.c. $\varphi_n \overset{X}{\to} \varphi_0$ risulta $A\varphi_n \overset{Y}{\to} A\varphi_0$.

Definizione 11. - *Dato $A \in \mathcal{O}(X, Y)$ si dice che A è limitato se esiste $m \geq 0$ t.c. $\|A\varphi\|_Y \leq m\|\varphi\|_X \quad \forall \varphi \in D_{(A)}$.*

Teorema 1. - *$A \in \mathcal{O}(X, Y)$ è limitato sse è continuo.*

Dimostrazione. - limitato $\Rightarrow$ continuo. Infatti $\forall \varphi, \psi \in D_{(A)}$ risulta

$$\|A(\varphi - \psi)\|_Y \leq m\|\varphi - \psi\|_X,$$

cioè

$$\|A\varphi - A\psi\|_Y \leq m\|\varphi - \psi\|_X.$$

Presa, dunque, una successione $\{\varphi_n\}$ t.c. $\varphi_n \overset{X}{\to} \varphi$, la relazione precedente implica immediatamente $A\varphi_n \overset{Y}{\to} A\varphi$.

continuo $\Rightarrow$ **limitato**. Dalla definizione di continuità, preso $\varphi_0 = 0$ e $\epsilon = 1$ abbiamo che

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ t.c. } \forall \varphi \in D_{(A)} \text{ con } \|\varphi\|_X < \delta_1 \text{ risulta } \|A\varphi\|_Y < 1.$$

Preso, allora, d t.c. $0 < d < \delta_1$, consideriamo $\varphi \in D_{(A)}$, $\varphi \neq \emptyset$, e costruiamo il vettore $\psi = \frac{d}{\|\varphi\|}\varphi$. Abbiamo

$$\|\psi\| = \|\frac{d\varphi}{\|\varphi\|}\| = d < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \|A\psi\| < 1,$$

da cui

$$\|A\psi\| = \|A\frac{d\varphi}{\|\varphi\|}\| = \frac{d}{\|\varphi\|}\|A\varphi\| < 1.$$

Perciò $\|A\varphi\| \leq \frac{1}{d}\|\varphi\|$. Se poi $\varphi = 0_X$, il risultato è immediato. Basta, dunque, prendere $m = \frac{1}{d}$ per concludere $\blacksquare$.

Consideriamo, ora, l'insieme $\mathcal{B}(X,Y) \subseteq \mathcal{O}(X,Y)$ degli operatori lineari limitati da X in Y per cui $D_{(A)} = X$ e introduciamo per ogni $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ l'insieme

$$\mathcal{M}_{(A)} := \{m \geq 0 : \quad \|A\varphi\| \leq m\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in X\}.$$

Poniamo, poi, $\|A\| := \inf \mathcal{M}_{(A)}$. Osserviamo, allora, che

$$\|A\varphi\|_Y \leq \|A\|\|\varphi\|_X \quad \forall \varphi \in X \quad \Rightarrow \quad \|A\| \in \mathcal{M}_{(A)}.$$

Infatti valgono le seguenti proprietà (per definizione di inf):

1) $\forall m \in \mathcal{M}_{(A)} \quad m \geq \|A\|$;
2) $\forall x \in \mathbf{R}$ t.c. $x \leq m \ \forall m \in \mathcal{M}_{(A)} \ \Rightarrow \ x \leq \|A\|$.

Abbiamo allora $\forall \varphi \in X$ t.c. $\varphi \neq 0_X$,

$$\left[\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq m \quad \forall m \in \mathcal{M}_{(A)}\right] \Rightarrow \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \|A\|.$$

Inoltre è banalmente vero che $\|A0_X\| \leq \|A\|\|0_X\|$ per cui possiamo concludere che $\forall \varphi \in X$ risulta $\|A\varphi\| \leq \|A\|\|\varphi\|$, quindi $\|A\| \in \mathcal{M}_{(A)}$.

Abbiamo allora il seguente

Teorema 2. - *Dati due spazi normati X e Y sullo stesso campo K ($\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) risulta* *a)* $\mathcal{B}(X,Y)$ *è spazio vettoriale se munito dell'operazione di somma e prodotto per uno scalare definite in precedenza;*

b) $\mathcal{B}(X,Y)$ *è spazio normato se munito di* $\|A\|$ *come definita sopra.*

Osservazione 5. - La quantità $\|A\|$ si può introdurre in generale per $A \in \mathcal{O}(X,Y)$ limitato, senza richiedere che $D_{(A)} \equiv X$. In tal caso, però, definirla una norma è del tutto arbitrario.

Teorema 3. - *Dato* $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ *risulta*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \varphi \neq 0_X}} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|=1}} \|A\varphi\| = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|\leq 1}} \|A\varphi\|.$$

Inoltre se $X = Y$ *è prehilbertiano, abbiamo*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\varphi,\psi \in X \\ \|\varphi\|=\|\psi\|=1}} |(\varphi, A\psi)|.$$

Enunciamo, ora, un risultato che sarà molto utile nel seguito.

Teorema 4. - *Dati due spazi normati* X *e* Y *sullo stesso campo* K *(*$\mathbf{R}$ *o* $\mathbf{C}$*) ed un operatore* $A \in \mathcal{O}(X,Y)$*, le due affermazioni seguenti sono equivalenti:*

a) A *è invertibile e* A^{-1} *è continuo;*

b) $\exists \mu > 0$ *t.c.* $\|A\varphi\| \geq \mu\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in D_{(A)}$.

Dimostrazione. - a) $\Rightarrow$ **b)**. Se A è invertibile, esiste l'inverso A^{-1} ed è definito così

$$\forall \psi \in \mathcal{R}_{(A)} \quad A^{-1}\psi := \varphi \quad \text{t.c.} \quad A\varphi = \psi.$$

Se, dunque, A^{-1} è continuo, dovrà essere

$$\|A^{-1}\psi\|_X \leq \mu^{-1}\|\psi\|,$$

cioè

$$\mu\|\varphi\| \leq \|A\varphi\|.$$

Tralasciamo l'implicazione **b)** $\Rightarrow$ **a)** $\quad \blacksquare$.

Applicazione. - Facciamo vedere che gli operatori $\hat{P}$, $\hat{Q}$, P, Q ed i loro inversi, pur essendo lineari, non sono limitati.

1A Mostriamo che non esiste $m \geq 0$ t.c. $\|\hat{Q}f\| \leq m\|f\|$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Consideriamo, infatti, la successione $\{f_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-n)(n+1-x)}} & n < x < n+1 \\ 0 & x \leq n, \ x \geq n+1. \end{cases}$$

È chiaro che $\{f_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{R})$, poichè $\forall n \; f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, ossia all'insieme delle funzioni a supporto compatto infinitamente derivabili con continuità. Abbiamo, inoltre,

$$\|\hat{Q}f_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_n^2 \, dx = \int_n^{n+1} x^2 f_n^2 \, dx > n^2 \int_n^{n+1} f_n^2 \; dx = n^2 \int_{\mathbf{R}} f_n^2 \, dx = n^2 \|f_n\|^2.$$

Quindi $\|\hat{Q}f_n\|^2 > n^2\|f_n\|^2$ e la m richiesta dalla definizione di limitatezza non esiste.

Mostriamo che anche l'inverso non è limitato. Basterà far vedere che non esiste $\mu > 0$ t.c. $\|\hat{Q}f\| > \mu\|f\|$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Consideriamo, infatti, la successione $\{g_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, così definita

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-n^2x^2/2}.$$

Abbiamo allora

$$\|g_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}} g_n^2 \, dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-n^2x^2} \; dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} \; dy = 1.$$

$$\|\hat{Q}g_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}} x^2 g_n^2 \, dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} x^2 e^{-n^2x^2} \; dx = \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^2 e^{-y^2} \; dy = \frac{1}{2n^2}.$$

Dunque $\|\hat{Q}g_n\|^2 = \frac{1}{2n^2}$ ed è impossibile trovare $\mu > 0$ che soddisfi la relazione.

1B Per verificare che Q ed il suo inverso non sono continui, basta adattare i ragionamenti precedenti rispettivamente alle successioni $\{f_n\}$, definita da $f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}$, $n \in \mathbf{Z}$ e $\{g_n\}$, definita da $g_n(x) = \chi_{(-1/n,1/n)}$, $n \in \mathbf{N}$.

2A Per verificare che $\hat{P}$ ed il suo inverso non sono continui, basta adattare i ragionamenti precedenti rispettivamente alle successioni $\{f_n\}$, definita da $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-n^2x^2/2}$, $n \in \mathbf{N}$ e $\{g_n\}$, definita da $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{n}} e^{-x^2/(2n^2)}$, $n \in \mathbf{N}$.

2B Per verificare che P non è continuo, basta considerare la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \dfrac{1}{n}, \\ nx + 1 & -\dfrac{1}{n} < x \leq 0, \\ -nx + 1 & 0 < x < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

e mostrare che P non è limitato. Infine si può far vedere che anche P^{-1} non è limitato.

Un risultato molto importante (che qui dimostriamo nell'ambito degli spazi di Hilbert, ma che in realtà vale per tutti gli spazi normati) è il seguente

Teorema 5. - *Ogni operatore $A \in \mathcal{O}(H)$ con H di Hilbert di dimensione finita è limitato.*

Dimostrazione. - Sia N la dimensione dello spazio e sia $\{u_n\}$ un s.o.n.c. in H. Preso $\varphi \in D_{(A)}$, consideriamo il suo sviluppo di Fourier rispetto a tale base. Sarà

$$\varphi = \sum_{n=1}^{N} (\varphi, u_n) u_n.$$

Inoltre abbiamo
$$\|A\varphi\| = \|A\sum_{n=1}^{N}(\varphi, u_n)u_n\| = \|\sum_{n=1}^{N}(\varphi, u_n)Au_n\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N}\|(\varphi, u_n)Au_n\| = \sum_{n=1}^{N}|(\varphi, u_n)|\|Au_n\|.$$
Posto
$$M = \max_{1\leq n\leq N}\{\|Au_n\|\},$$
possiamo ulteriormente maggiorare
$$\leq M\sum_{n=1}^{N}|(\varphi, u_n)| \leq M\sum_{n=1}^{N}\|\varphi\|\|u_n\| = MN\|\varphi\|$$
avendo applicato la disuguaglianza di Schwarz ed il fatto che $\|u_n\| = 1\ \forall n$. Perciò, in definitiva,
$$\|A\varphi\| \leq MN\|\varphi\|$$
con $MN \in \mathcal{M}_{(A)}$ (in realtà è $\|A\| < MN$, perchè la stima si può migliorare) ∎.

Abbiamo dato in precedenza la definizione di funzionale. Dato H di Hilbert, indichiamo con H' l'insieme dei funzionali lineari e continui su H (in pratica $H' = \mathcal{B}(H, \mathbf{R})$ o $H' = \mathcal{B}(H, \mathbf{C})$). A questo riguardo vediamo il fondamentale risultato di rappresentazione

Teorema 6 (di Riesz). - *Se $L \in H'$, allora $\exists!\ y \in H$ t.c. $Lx = (x, y)\ \forall x \in H$.*

Dimostrazione. - Se $Lx = 0\ \ \forall x \in H$, basterà prendere $y = 0$. Supponiamo, dunque, d'ora in avanti che $\exists x \in H$ t.c. $Lx \neq 0$. Definiamo, allora,
$$M = \{x \in H:\ Lx = 0\}.$$
Poichè L è lineare, M è una varietà lineare; inoltre la continuità di L implica che M è un sottospazio. Per l'ipotesi fatta sopra, inoltre, il teorema della proiezione garantisce che $M^\perp$ non consiste del solo 0_H.

Perciò certamente esiste $z \in M^\perp$ t.c. $\|z\| = 1$. Definiamo, allora,
$$u := (Lx)z - (Lz)x.$$
Abbiamo
$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0.$$
Quindi $u \in M$ e $(u, z) = 0$, poichè $z \in M^\perp$. Dunque
$$0 = (u, z) = (Lx)(z, z) - (Lz)(x, z)$$

cioè

$$Lx = (Lx)(z,z) = (Lz)(x,z) \quad (\text{poichè } \ (z,z) = 1).$$

Dal momento che vogliamo porre $Lx = (x,y)$, basterà prendere $y = \overline{(Lz)}z$.

Che tale y sia unico è facile da far vedere. Supponiamo, infatti, che $\exists y' \neq y$ t.c. $(x,y) = (x,y') \ \ \forall x \in H$. In tal caso, posto $z = y - y'$ avremmo $(x,z) = 0 \ \forall x \in H$, che implica, tra l'altro, $(z,z) = 0$, ossia $z = 0 \ \Rightarrow \ y = y'$, contrariamente a quanto assunto sopra $\blacksquare$.

Osservazione 6. - Facciamo vedere che nel caso del Teorema di Riesz risulta

$$\|L\|_{\mathcal{B}(H,\mathbf{R})} = \|y\|_H,$$

essendo y l'elemento di H che rappresenta il funzionale L. Abbiamo

$$\forall x \in H \qquad Lx = (x,y) \ \Rightarrow \ |Lx| = |(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$$

per la disuguaglianza di Schwarz. Scelto dunque $x \in H$ t.c. $\|x\| = 1$, avremo

$$\|L\|_{\mathcal{B}(H,\mathbf{R})} = \sup_{\|x\|=1} |Lx| \leq \|y\|.$$

D'altro canto, preso $x = \frac{y}{\|y\|}$, risulterà

$$Lx = \frac{1}{\|y\|}(y,y) = \|y\| \ \Rightarrow \ \|L\|_{\mathcal{B}(H,\mathbf{R})} \geq \|y\|.$$

Dalle due disuguaglianze si ricava immediatamente che $\|L\|_{\mathcal{B}} = \|y\|_H \quad \blacksquare$.

Per sviluppare completamente la teoria degli operatori lineari in vista delle sue applicazioni alla Meccanica Quantistica, facciamo, ora, un ulteriore passo in avanti.

Definizione 12. - *Dato H di Hilbert e $A \in \mathcal{O}(H)$ definiamo il sottoinsieme*

$$D^\dagger_{(A)} := \{\psi \in H : \exists \psi' \in H \ t.c. \ \ (A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi') \ \forall \varphi \in D_{(A)}\}.$$

Osserviamo subito che $D^\dagger_{(A)} \neq \emptyset$ perchè certamente $0_H \in D^\dagger_{(A)}$. Infatti, preso $\psi = 0_H$ e $\psi' = 0_H$ è certamente vero che

$$(A\varphi, 0_H) = (\varphi, 0_H) \qquad \forall \ \varphi \in D_{(A)}.$$

Definizione 13. - *Dato $A \in \mathcal{O}(H)$, A si dice aggiuntabile se*

$$[\psi', \psi" \in H : \ (\varphi, \psi') = (\varphi, \psi") \ \forall \varphi \in D_{(A)}] \ \Rightarrow \ [\psi' = \psi"].$$

Definizione 14. - *Dato $A \in \mathcal{O}(H)$ aggiuntabile, si chiama aggiunto di A l'applicazione $A^\dagger : D^\dagger_{(A)} \to H$ definita da $\psi \mapsto A^\dagger\psi := \psi'$ se ψ' è l'unico vettore di H t.c. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi')$ $\forall \varphi \in D_{(A)}$.*

Osservazione 7. - L'applicazione $A^\dagger$ è ben definita in quanto, per la natura di $D^\dagger_{(A)}$, uno ψ' come richiesto nella Definizione 14 esiste effettivamente (e ciò accadrebbe anche senza l'aggiuntabilità). La condizione di aggiuntabilità garantisce poi che ψ' è unico.

Osservazione 8. - Dato un operatore $A \in \mathcal{O}(H)$, aggiuntabile, l'aggiunto è un operatore lineare, cioè $A^\dagger \in \mathcal{O}(H)$ e risulta $D_{(A^\dagger)} = D^\dagger_{(A)}$. Senza entrare troppo nei dettagli, è facile vedere che se $A^\dagger$ è un operatore lineare, allora per la stessa definizione , risulta $D_{(A^\dagger)} = D^\dagger_{(A)}$. Occorrerebbe, dunque, far vedere che $D^\dagger_{(A)}$ è una varietà lineare in H e che l'operatore $A^\dagger$ soddisfa le condizioni di linearità. Lasciamo la verifica di questi due fatti per esercizio.

Osservazione 9. - Consideriamo $A \in \mathcal{B}(H)$. Ciò vuol dire che

$$\forall \varphi \in H \quad \psi := A\varphi \in H.$$

Preso, dunque, $\psi \in H$, consideriamo il prodotto scalare $(A\varphi, \psi)$. Per ogni ψ fissato, esso definisce un funzionale lineare e continuo su tutto H. Infatti

a) $(A(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2), \psi) = \lambda_1(A\varphi_1, \psi) + \lambda_2(A\varphi_2, \psi)$;

b) $\forall \varphi \in H$ $|(A\varphi, \psi)| \leq \|A\varphi\|\|\psi\| \leq \|A\|\|\varphi\|\|\psi\|$.

Allora, per il Teorema di Riesz, per ogni $\psi \in H$ esiste unico ψ' t.c. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi')$. poniamo, poi, $\psi' = A^\dagger\psi$. È chiaro che, in questo caso, $D^\dagger_{(A)} \equiv H$ e la condizione di aggiuntabilità è automaticamente verificata.

Osservazione 10. - Se $A \in \mathcal{O}(H)$ è aggiuntabile, allora vale la relazione

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^\dagger\psi), \qquad \forall \varphi \in D_{(A)},\ \forall \psi \in D^\dagger_{(A)},$$

come si vede direttamente dalla Definizione 14. Questa è la relazione fondamentale tra operatore aggiuntabile e suo aggiunto ed anzi essa caratterizza completamente $A^\dagger$, insieme alla condizione che $D_{(A^\dagger)}$ sia il massimo tra tutti i domini degli operatori che la soddisfano (tralasciamo la verifica di quest'ultima proprietà).

Abbiamo, ora, una relazione fondamentale che permette di verificare l'esistenza o meno dell'aggiunto, senza controllare esplicitamente la condizione di aggiuntabilità.

Teorema 7. - *Dato $A \in \mathcal{O}(H)$ A è aggiuntabile sse $\overline{D}_{(A)} = H$.*

Osservazione 11. - Per quanto osservato in precedenza sui loro domini, è facile vedere che $\hat{P}$, $\hat{Q}$, P, Q sono aggiuntabili. Infatti erano definiti tutti su insiemi densi in $L^2(\mathbf{R})$.

Definizione 15. - *Un operatore A in H si dice simmetrico o hermitiano se è aggiuntabile e se $A^\dagger \supset A$*

Osservazione 12. - In pratica si richiede che $D_{(A^\dagger)} \supset D_{(A)}$ e che

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi), \qquad \forall\, \varphi, \psi \in D_{(A)}.$$

Applicazione. - Intendendo $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ come sottoinsieme di $L^2(\mathbf{R})$, è facile vedere che $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ sono simmetrici. Abbiamo infatti $\forall\, f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$

$$(\hat{P}f, g) = (-if', g) = \int_{\mathbf{R}} (-if'(x))\overline{g(x)}\, dx = -i[f(x)\overline{g(x)}]_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g'(x)}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{(-ig'(x))}\, dx = (f, \hat{P}g);$$

$$(\hat{Q}f, g) = \int_{\mathbf{R}} xf(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{xg(x)}\, dx = (f, \hat{Q}g).$$

Definizione 16. - *Sia $A \in \mathcal{O}(H)$ simmetrico. Se $A^\dagger = A$ diciamo che A è autoaggiunto.*

Osservazione 13. - In pratica si richiede che $D_{(A^\dagger)} = D_{(A)}$ e che

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi), \qquad \forall\, \varphi, \psi \in D_{(A)}.$$

Osservazione 14. - Anche se la verifica non è immediata, risulta che gli operatori P e Q sono autoaggiunti.

Siamo ora in grado di dare una fondamentale applicazione dei metodi finora sviluppati alla Meccanica Quantistica.

Definizione 17. - *Dato $A \in \mathcal{O}(H)$ autoaggiunto e preso $\psi \in D_{(A^2)}$ t.c. $\|\psi\| = 1$, si dice valore di aspettazione di A rispetto a ψ il numero*

$$< A >_\psi := (\psi, A\psi)$$

e dispersione di A rispetto a ψ il numero

$$\Delta_\psi A := \sqrt{(\psi, (A - < A >_\psi 1)^2\psi)}.$$

Osservazione 15. - In Statistica la dispersione è conosciuta anche come varianza. Senza entrare troppo nei dettagli, intuitivamente per grandezze conosciute solo in via probabilistica, la dispersione misura l'incertezza nella conoscenza del valor medio od atteso.

Osservazione 16. - Si osservi che la definizione di $< A >_\psi$ è corretta poichè $D_{(A^2)} := \{\psi \in H : \psi, A\psi \in D_{(A)}\} \subset D_{(A)}$. Inoltre $< A >_\psi \in \mathbf{R}$ perchè

$$(\psi, A\psi) = (\psi, A^\dagger\psi) = (A\psi, \psi) = \overline{(\psi, A\psi)}.$$

Anche la definizione di $\Delta_\psi A$ è corretta perchè

$$D_{(A-<A>1)} = D_{(A)} \ \Rightarrow \ D_{((A-<A>1)^2)} = D_{(A^2)} \subset D_{(A)}.$$

Dobbiamo, però, anche far vedere che il numero sotto radice è reale non negativo. Intanto osserviamo che $A- < A >_\psi 1$ è autoaggiunto. Infatti

$$\overline{D_{(A-<A>1)}} = \overline{D_{(A)}} = H$$

ed è facile mostrare che

$$(A- < A >_\psi 1)^\dagger = A^\dagger + (- < A >_\psi 1)^\dagger = A- < A >_\psi 1.$$

Abbiamo, allora,

$$(\psi, (A- < A >_\psi 1)^2\psi) = ((A- < A >_\psi 1)\psi, (A- < A >_\psi 1)\psi) =$$

$$= \|(A- < A >_\psi 1)\psi\|^2 \geq 0,$$

da cui ricaviamo $\Delta_\psi A = \|(A- < A >_\psi 1)\psi\| \geq 0 \quad \blacksquare$.

Abbiamo, allora, il seguente

Teorema 8. - *Dati A, $B \in \mathcal{O}(H)$ autoaggiunti, si consideri la parentesi di commutazione $[A, B] := AB - BA$ e sia $\psi \in H$ t.c. $\|\psi\| = 1$ e $\psi \in D_{(A^2)} \cap D_{(B^2)} \cap D_{([A,B])}$. Allora*

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}|(\psi, [A, B]\psi)|.$$

Dimostrazione. - Poniamo

$$U := A- < A >_\psi 1; \qquad V := B- < B >_\psi 1$$

e consideriamo $\varphi := U\psi + i\lambda V\psi$ con $\lambda \in \mathbf{R}$. Abbiamo, allora

$$0 \leq (\varphi, \varphi) = (U\psi + i\lambda V\psi, U\psi + i\lambda V\psi) = (U\psi, U\psi) + i\lambda(V\psi, U\psi) - i\lambda(U\psi, V\psi)+$$

$$+\lambda^2(V\psi, V\psi) = (\psi, U^2\psi) + \lambda^2(\psi, V^2\psi) - i\lambda(\psi, (UV - VU)\psi) =$$

$$= (\Delta_\psi A)^2 + \lambda^2(\Delta_\psi B)^2 - i\lambda(\psi, [A, B]\psi),$$

poichè

$$UV-VU = (A- < A >_\psi 1)(B- < B >_\psi 1)-(B- < B >_\psi 1)(A- < A >_\psi 1) = AB-BA.$$

Posto, dunque,

$$I(\lambda) := (\Delta_\psi A)^2 + \lambda^2(\Delta_\psi B)^2 - i\lambda(\psi, [A, B]\psi) \geq 0$$

esso sarà minimo quando

$$2\lambda(\Delta_\psi B)^2 - i(\psi, [A, B]\psi) = 0$$

ossia $\lambda = \frac{i(\psi,[A,B]\psi)}{2(\Delta_\psi B)^2} \in \mathbf{R}$. Sostituendo abbiamo

$$(\Delta_\psi A)^2 + \frac{|(\psi, [A, B]\psi)|^2}{4(\Delta_\psi B)^2} - \frac{|(\psi, [A, B]\psi)|^2}{2(\Delta_\psi B)^2} \geq 0,$$

cioè anche

$$(\Delta_\psi A)^2(\Delta_\psi B)^2 \geq \frac{1}{4}|(\psi, [A, B]\psi)|^2,$$

$$(\Delta_\psi A)(\Delta_\psi B) \geq \frac{1}{2}|(\psi, [A, B]\psi)| \quad \blacksquare.$$

Applicazione. - Abbiamo detto sopra che P e Q sono autoaggiunti. Poichè $[Q, P] = i1|_{D([Q,P])}$ abbiamo

$$\Delta_\psi Q \Delta_\psi P \geq \frac{1}{2}|(\psi, i1\psi)| = \frac{1}{2}$$

che è la ben nota relazione di indeterminazione di Heisenberg. Nella Meccanica Quantistica le osservabili sono rappresentate da operatori lineari autoaggiunti definiti su opportune varietà lineari di L^2. In particolare Q rappresenta la posizione, mentre P rappresenta la quantità di moto. Poichè $|\psi|^2$ è la densità di probabilità della particella, avremo

$$< Q >= \text{valore di aspettazione per la posizione},$$

$$< P >= \text{valore di aspettazione per il momento}.$$

Inoltre

$$\Delta_\psi Q = \text{dispersione per la posizione},$$

$$\Delta_\psi P = \text{dispersione per il momento}.$$

La relazione di indeterminazione dice allora che non è possibile conoscere con precisione assoluta ($\equiv$ dispersione nulla) entrambe le osservabili.