5. Introduzione all'integrale di Lebesgue

La teoria classica dell'integrazione (dovuta, fra gli altri, a Cauchy e Riemann), pur fornendo uno strumento analitico molto potente, si rivela insufficiente sotto vari punti di vista, soprattutto per quanto riguarda le condizioni di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

In ambito matematico (ma non solo) si è quindi avvertita la necessità di introdurre uno strumento più potente e flessibile. Il passo fondamentale in questo senso è stato fatto da Lebesgue, che a partire dalla sua tesi di laurea del 1902 fino ai successivi lavori del 1906 e 1910, ha introdotto appunto una nuova nozione di integrale. La Teoria dell'integrale di Lebesgue ha conosciuto uno sviluppo velocissimo con il contributo di vari studiosi, che in breve tempo hanno realizzato uno strumento versatile, il quale ha permesso poi di aprire nuove frontiere nella ricerca matematica ed anche applicata.

Naturalmente non è qui possibile dare una presentazione organica di tale teoria. Ci limitiamo alla definizione come presentata dal prof. E. Gagliardo, per passare poi ai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, che sono i risultati di maggiore interesse pratico per noi in questo contesto.

Sia $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ una funzione reale di N variabili reali definita in tutto $\mathbf{R}^N$. Vogliamo studiare opportune ipotesi per poter definire gli integrali

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)\,dx, \qquad \int_I f(x)\,dx.$$

Il secondo, esteso ad un sottoinsieme $I \subseteq \mathbf{R}^N$ si riconduce al primo introducendo la funzione caratteristica di I:

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\chi_I(x)\,dx \quad \text{dove} \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \;\; x \in I \\ 0 & \text{per} \;\; x \notin I. \end{cases}$$

La definizione di integrale richiede preventivamente qualche nozione di "misura" di un insieme I N-dimensionale. Abbiamo, quindi, la seguente

Definizione. - Un insieme $T \subset \mathbf{R}^N$ è un *rettangolo* se può essere rappresentato come il prodotto cartesiano di N intervalli limitati, eventualmente vuoti. Un insieme $P \subset \mathbf{R}^N$ è un *σ-rettangolo* se è l'unione di una infinità numerabile di rettangoli disgiunti $\blacksquare$.

Definizione. - La misura di un rettangolo T è il prodotto delle lunghezze dei suoi lati e la indichiamo con $|T|$. La misura di un σ-rettangolo è la serie delle misure dei rettangoli componenti. Dato un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^N$, la sua *misura esterna* è l'estremo inferiore dell'insieme descritto da $\sum_{k=1}^{\infty} |T_k|$, al variare delle successioni di rettangoli $\{T_k\}$ tali che $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \supseteq A$. Indichiamo tale misura esterna con $|A|_e$ $\blacksquare$.

Definizione. - Diciamo che $A \subseteq \mathbf{R}^N$ ha misura nulla quando $\forall\,\epsilon > 0$ esiste una successione di rettangoli $\{T_k\}$, eventualmente anche in parte sovrapposti, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |T_k| < \epsilon \quad \blacksquare.$$

Osservazione. - L'insieme $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ ha misura nulla. L'unione (anche infinita) di insiemi di misura nulla ha misura nulla. Possiamo dunque concludere che l'intero insieme $\mathbf{Q}$ ha misura nulla $\blacksquare$.

Definizione. - Diciamo che una certa proprietà vale *quasi ovunque (q.o.)* se vale a meno di insiemi di misura nulla $\blacksquare$.

Osservazione. - La funzione di Dirichlet $D:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{per} \quad x\in\mathbf{Q}\\ 0 & \text{per} \quad x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

è q.o. nulla $\blacksquare$.

Definizione. - Una funzione $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ è detta *a scala* o *costante a tratti* se è diversa da zero solo in un numero finito di rettangoli e in ciascuno di essi ha un valore costante $\blacksquare$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire il nuovo integrale. Una prima classe di funzioni per cui definiamo l'integrale è proprio data dalle funzioni a scala. Indicato con c_k il valore che la f assume nel rettangolo T_k, abbiamo

$$\int_{\mathbf{R}^N} f := \sum_k c_k|T_k|.$$

Sono ovvie le seguenti proprietà:

a) Se $f=h+k$ con h e k entrambe costanti a tratti, allora $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} f=\int_{\mathbf{R}^N} h+\int_{\mathbf{R}^N} k$.

b) Se $f\le g$ con f e g entrambe costanti a tratti, allora $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} f\le\int_{\mathbf{R}^N} g$.

c) $\displaystyle\Big|\int_{\mathbf{R}^N} f\Big|\le\int_{\mathbf{R}^N}|f|$.

d) Se I è un σ-rettangolo di misura finita e f è costante a tratti, allora $\displaystyle\Big|\int_I f\Big|\le\sup|f|\,|I|$.

Definizione. - Una funzione $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ è detta integrabile secondo Lebesgue (o sommabile) se esiste una successione $\{f_k\}$ di funzioni costanti a tratti tali che

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x)=f(x) \qquad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N; \tag{5.1}$$

$$\lim_{k,h\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|f_k-f_h|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\,\epsilon>0\ \exists K_\epsilon \text{ t.c. } \forall\,h,\ k>K_\epsilon \quad \int_{\mathbf{R}^N}|f_h-f_k|<\epsilon. \tag{5.2}$$

Si pone, allora

$$\int_{\mathbf{R}^N} f := \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^N} f_k \quad \blacksquare.$$

Osservazione. - La condizione (5.2) afferma che la successione numerica degli integrali delle f_k a scala è una successione di Cauchy in $\mathbf{R}$ (per maggiori dettagli sulle successioni di Cauchy, si veda la prossima Sezione). Infatti

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N} f_k - \int_{\mathbf{R}^N} f_h \right| \leq \int_{\mathbf{R}^N} |f_k - f_h| < \epsilon$$

e questo garantisce che il limite assunto come definizione dell'integrale della f certamente esiste ■.

Osservazione. - Se u è integrabile e $v = u$ q.o., allora anche v è integrabile ■.

Osservazione. - Se f è integrabile secondo Lebesgue, anche $|f|$ lo è. Infatti se $f_k \to f$ q.o., allora anche $|f_k| \to |f|$ q.o. Inoltre

$$\lim_{k,h\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^N} |f_k - f_h| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k,h\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^N} \big||f_k| - |f_h|\big| = 0$$

perchè $||f_k| - |f_h|| \leq |f_k - f_h|$. Questa è la grossa novità dell'integrale di Lebesgue, rispetto a quello di Riemann, per il quale integrabilità ed assoluta integrabilità in generale sono risultati indipendenti ■.

Tralasciando molti aspetti che, a rigore, la nostra definizione lascia in sospeso e che occorrerebbe verificare con cura (ad esempio, l'indipendenza del valore dell'integrale dalla scelta di una particolare successione di costanti a tratti approssimante, ma non solo!), passiamo a considerare i risultati di passaggio al limite sotto segno di integrale, che possono essere dimostrati nell'ambito della Teoria dell'integrale di Lebesgue.

Teorema della convergenza monotona (di Beppo Levi). - *Sia*

$$f_0 \equiv 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$$

una successione crescente di funzioni integrabili secondo Lebesgue e tale che

$$\sup_i \int_{\mathbf{R}^N} f_i(x) \leq A.$$

Sia $f(x) = \lim_{i\to+\infty} f_i(x)$ *q.o. finito. La funzione* f *risulta allora integrabile secondo Lebesgue e si ha*

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_i(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \lim_{i\to+\infty} f_i(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) \quad ■.$$

Teorema della convergenza dominata (di Lebesgue). - *Si consideri una successione di funzioni* $\{f_k(x)\}$ *integrabili secondo Lebesgue ed una funzione* $f(x)$ *tale che*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N;$$

$$|f_k(x)| \le g(x) \quad q.o. \ in \ \mathbf{R}^N \quad con \ \ g \in L^1(\mathbf{R}^N).$$

Allora anche f è integrabile secondo Lebesgue e risulta

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^N} f_k(x) = \int_{\mathbf{R}^N}\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x), \qquad \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^N}|f_k - f| = 0 \quad \blacksquare.$$

Concludiamo questa sezione con alcuni esercizi sui Teoremi di convergenza testè menzionati.

Esercizio 1) Si consideri la successione definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \in (\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrove in } (0,1). \end{cases}$$

Verificare che $\{f_n\} \subseteq L^1(0,1)$ e calcolare (se esiste) il limite nel senso di $L^1(0,1)$.

Esercizio 2) Si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = n\log\left(1 + \left(\frac{x^2}{n}\right)^{\alpha}\right) \qquad x \in (0,1), \quad \alpha \ge 1.$$

Calcolare al variare di α in $[1,\infty[$ il valore del limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Esercizio 3) Verificare che la funzione $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x\,e^{-2x}$ appartiene a $L^1(0,+\infty)$. Calcolare poi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,dx$$

con $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})e^{-2x}$.

Esercizio 4) Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da

$$f_n(x) = \mathrm{Th}[(x-1)^{2n}] - \frac{n^2x^2}{2(1+n^2x^2)};$$

calcolare in $L^1(-10,10)$ il limite di f_n.

Esercizio 5) (Difficile) Sia $\{r_n : \quad n = 1,2,\ldots\}$ l'insieme dei razionali di $[0,1]$ definito da $r_n = \frac{1}{2^n}$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_j\}$ con

$$f_j(x) = \sum_{n=1}^{j} 2^{-n}|\log|x - r_n||.$$

a) Verificare che $\{f_j\} \subseteq \ L^1(0,1)$;

b) verificare che la successione converge in tale spazio ad una funzione limite $f(x)$ opportuna;

c) calcolare una maggiorazione per la norma di f in L^1.