Ricerca di integrali particolari delle equazioni lineari a coefficienti costanti

Per alcune classi di equazioni differenziali lineari, la ricerca di un integrale particolare $\varphi(x)$ può, in alcuni casi, essere fatta evitando l'uso del metodo di variazione delle costanti arbitrarie, ricercando $\varphi(x)$ secondo lo schema sotto riportato. I coefficienti che compaiono nelle espressioni di $\varphi(x)$ vanno determinati imponendo a $\varphi(x)$ di soddisfare identicamente l'equazione differenziale.

Nel seguito ci limiteremo al caso delle equazioni a coefficienti costanti del tipo

$$(*) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x)$$

1) $F(x) = P_m(x)$ polinomio in x di grado $m \geq 0$:
   $\varphi(x) = P_q(x)$ polinomio in x (a coefficienti da determinarsi) di grado q ove $q = m + r$ essendo r l'ordine minimo di derivazione con cui compare la y al primo membro della (*) (La y è considerata come derivata di ordine zero, quindi $a_n \neq 0 \;\rightarrow\; r = 0$).

2) $F(x) = he^{kx}$ (h e k costanti assegnate):

   α) Se k non è radice dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = Ae^{kx}$, A costante da determinarsi;

   β) Se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = Ax^r e^{kx}$, A costante da determinarsi.

3) $F(x) = P_m(x)e^{kx}$, $P_m(x)$ polinomio in x di grado $m > 0$:
   $\varphi(x) = P_q(x)e^{kx}$, $P_q(x)$ polinomio in x (a coefficienti da determinarsi) di grado q, ove $q = m$ se k non è radice dell'equazione caratteristica e $q = m + r$ se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica.

4) $F(x) = h\sin(kx)$ oppure $F(x) = h\cos(kx)$ (h e k costanti assegnate):

   α) Se $\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$, $A,\ B$ costanti da determinarsi;

   β) Se $\pm ik$ sono radici r-ple dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = x^r(A\sin(kx) + B\cos(kx))$, $A,\ B$ costanti da determinarsi.

5) $F(x) = h\sinh(kx)$ oppure $F(x) = h\cosh(kx)$ (h e k costanti assegnate):

   α) Se $\pm k$ non sono radici dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = A\sinh(kx) + B\cosh(kx)$, $A,\ B$ costanti da determinarsi;

   β) Se $+k$ o $-k$ è radice dell'equazione caratteristica, si pone

   $$\sinh(kx) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \qquad \cosh(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

   e ci si rifa ai casi 2) e 7).

6) $F(x) = e^{px}\sin(qx)$ oppure $F(x) = e^{px}\cos(qx)$ (p e q costanti assegnate):

α) Se $p \pm iq$ non sono radici dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = e^{px}(A\sin(qx) + B\cos(qx))$, $A,\ B$ costanti da determinarsi;

β) Se $p \pm iq$ sono radici r-ple dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = x^r e^{px}(A\sin(qx) + B\cos(qx))$, $A,\ B$ costanti da determinarsi.

7) Se $F(x)$ è somma di funzioni dei tipi precedenti, si pone $\varphi(x)$ uguale alla somma dei corrispondenti integrali particolari.

N.B. Se nella $\varphi(x)$ compaiono addendi che sono integrali particolari dell'equazione omogenea associata alla (*), si trascurano poichè si possono considerare già conglobati negli integrali della omogenea (cambierebbero solo le costanti moltiplicative).