13. Metodi Hilbertiani per la soluzione di problemi ai limiti

Nella Sezione precedente abbiamo sviluppato, anche se in forma estremamente concisa, alcuni aspetti della teoria degli operatori lineari fra spazi normati, soffermandoci in particolare sulle proprietà di base degli operatori continui ed aggiunti. Vogliamo ora sviluppare alcuni aspetti di questa teoria nell'ottica della loro applicazione ai problemi ai limiti per le equazioni differenziali.

Ricordiamo innanzi tutto la seguente

Definizione 1. - *Dato uno spazio H di Hilbert, un operatore $A \in \mathcal{O}(H)$ si dice hermitiano o simmetrico se è aggiuntabile e $A^\dagger \supset A$. In pratica richiediamo che $D^\dagger_{(A)} \supset D_{(A)}$ e che*

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \qquad \forall\varphi,\ \psi \in D_{(A)}.$$

Diciamo, poi, che un operatore hermitiano è semidefinito positivo se

$$(A\varphi, \varphi) \geq 0 \quad \forall\varphi \in D_{(A)}$$

e definito positivo se

$$(A\varphi, \varphi) > 0 \quad \forall\varphi \in D_{(A)} \backslash \{0_H\} \quad ■.$$

Definizione 2. - *Sia H uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{O}(H)$. Diciamo che lo scalare $\lambda \in \mathbf{C}$ è un autovalore di A se esiste $\varphi \in D_{(A)}$ con $\varphi \neq 0_H$ t.c.*

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad ■.$$

Tutti i vettori $\varphi \in D_{(A)}$ che soddisfano la relazione precedente si chiamano *autovettori* corrispondenti all'autovalore λ. La collezione degli autovettori corrispondenti al medesimo autovalore λ, forma insieme a 0_H una varietà lineare in $D_{(A)}$ chiamato *autospazio* associato a λ. La dimensione vettoriale dell'autospazio è la molteplicità dell'autovalore. Autovalori di molteplicità 1 si dicono *semplici.*

Gli operatori hermitiani hanno proprietà molto importanti e significative dal nostro punto di vista.

Teorema 1. - *Sia H uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{O}(H)$. Se A è hermitiano, allora valgono le seguenti proprietà:*

a) tutti gli autovalori di A sono reali;

b) autovettori corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali;

c) se A è definito positivo (semidefinito positivo), allora gli autovalori sono positivi (non-negativi).

Dimostrazione. - a) è banale se H è vettoriale su $\mathbf{R}$. Assumiamo, quindi, che H sia vettoriale su $\mathbf{C}$. Preso $\varphi \in D_{(A)}$ autovettore corrispondente all'autovalore λ e naturalmente $\varphi \neq 0$, abbiamo

$$\lambda(\varphi, \varphi) = (\lambda\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi) = (\varphi, \lambda\varphi) = \bar{\lambda}(\varphi, \varphi).$$

Dunque

$$\lambda = \bar{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

b) Consideriamo, ora, $\varphi_1 \in D_{(A)}$, $\varphi_2 \in D_{(A)}$, entrambi nonnulli e tali che

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Abbiamo

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) = (\lambda_1\varphi_1, \varphi_2) = (A\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, A\varphi_2) = (\varphi_1, \lambda_2\varphi_2) = \lambda_2(\varphi_1, \varphi_2).$$

Quindi $(\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ e poichè $\lambda_1 \neq \lambda_2$ concludiamo che $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, cioè che sono fra loro ortogonali.

c) Assumendo che A si definito positivo, preso $\varphi \in D_{(A)}$ autovettore corrispondente all'autovalore λ con $\varphi \neq 0$, abbiamo

$$\lambda(\varphi, \varphi) = (\lambda\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) > 0.$$

Dividendo per $\|\varphi\|^2 > 0$ (dal momento che φ è diverso da zero) ricaviamo proprio

$$\lambda = \frac{(A\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2} > 0 \quad \blacksquare.$$

Molto spesso (anche se non ci occuperemo qui di condizioni sufficienti perchè ciò accada) gli autovalori di un operatore hermitiano costituiscono una successione illimitata. In tal caso vale il seguente

Teorema 2. - *Sia H uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{O}(H)$. Se la successione degli autovalori è illimitata, ossia se $|\lambda_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, l'operatore è illimitato.*

Dimostrazione. - Per ipotesi $\{\lambda_n\}$ è una successione illimitata. Sia $\{\varphi_n\}$ la corrispondente successione di autovettori. Abbiamo

$$(A\varphi_n, A\varphi_n) = (\lambda_n\varphi_n, \lambda_n\varphi_n) = \lambda^2\|\varphi_n\|^2.$$

Quindi

$$\frac{\|A\varphi_n\|^2}{\|\varphi_n\|^2} = \lambda_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e, dunque, non è possibile che esista $m \geq 0$ t.c. $\forall\varphi \in D_{(A)}$ risulti $\|A\varphi\| \leq m\|\varphi\| \quad \blacksquare.$

Il teorema precedente ci dice che nella stragrande maggioranza delle applicazioni, gli operatori hermitiani non sono continui. Fra le varie conseguenze di questo fatto, di particolare interesse è che

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} Au_n \quad \text{con } \{u_n\} \subset D_{(A)}.$$

Tuttavia vale il seguente risultato, molto utile nelle applicazioni, come vedremo più avanti:

Teorema 3. - *Sis H uno spazio di Hilbert e $A \in \mathcal{O}(H)$ con A hermitiano. Supponiamo che A abbia una successione infinita di autovettori $\{\varphi_n\}$, $n = 1\ldots$, che forma una base per H. Se $\psi \in D_{(A)}$, allora da*

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, \varphi_n)\varphi_n \quad \textit{(sviluppo di Fourier di } \psi \textit{ rispetto alla base di } H\textit{)}$$

segue che

$$A\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, \varphi_n) A\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\psi, \varphi_n)\varphi_n.$$

Dimostrazione. - Poichè $A \in \mathcal{O}(H)$, per ogni $\psi \in D_{(A)} \subset H$ possiamo concludere che $A\psi \in H$ e quindi $A\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ con $c_n = (A\psi, \varphi_n)$, dal momento che $\{\varphi_n\}$ è una base per H. Poichè A è hermitiano e quindi gli autovalori sono reali,

$$(A\psi, \varphi_n) = (\psi, A\varphi_n) = (\psi, \lambda_n \varphi_n) = \bar{\lambda}_n (\psi, \varphi_n) = \lambda_n (\psi, \varphi_n).$$

Quindi $c_n = \lambda_n (\psi, \varphi_n)$ e, dunque,

$$A\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\psi, \varphi_n)\varphi_n \quad \blacksquare.$$

Osservazione 1. - Si noti che non applichiamo A ad un elemento generico di H, bensì ad un elemento del dominio dello stesso A, sviluppato rispetto alla base costituita dagli autovettori $\blacksquare$.

Osservazione 2. - Tutte le volte che possiamo determinare una successione infinita di autovettori che costituiscono una base per H, diciamo che abbiamo diagonalizzato l'operatore A $\blacksquare$.

Nel seguito vogliamo applicare questi risultati allo studio dei Problemi ai limiti e, quindi, gli operatori che considereremo avranno un carattere differenziale, mentre gli spazi saranno spazi di funzioni. Come al solito, il dominio dell'operatore riveste un ruolo assolutamente fondamentale nella teoria. Senza insistere troppo, osserviamo che nella determinazione del dominio intervengono in ugual misura questi due fattori

a) la compatibilità delle funzioni con l'operatore (in altri termini, le operazioni richieste devono poter essere eseguite e il risultato deve essere una funzione opportunamente sommabile); ad esempio la funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \in C^0(]-1,1[) \cap L^2(-1,1)$ è compatibile con l'operatore $Lf = ((1-x^2)f')'$ dal momento che

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad (1-x^2)f' = 2 \qquad \Rightarrow \qquad ((1-x^2)f')' = 0 \in L^2(-1,1);$$

b) le condizioni al contorno (ossia le condizioni sull'incognita e/o le sue derivate assegnate negli estremi dell'intervallo in esame).

Venendo, allora, ai problemi ai limiti, abbiamo innanzi tutto bisogno di un risultato relativo alle equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine.

Teorema 4. - *Supponiamo che $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ siano funzioni analitiche reali nell'intervallo (finito o infinito) $]a,b[$ e sia $A(x)>0$ per ogni $x\in]a,b[$. Esistono allora tre funzioni p, q, r analitiche reali nell'intervallo $]a,b[$ tali che sia p sia r sono positive in $]a,b[$ e risulta*

$$
Ay''+By'+Cy=\frac{1}{r}(py')'-\frac{q}{r}y \qquad \forall\, x\in]a,b[, \quad \forall\, y\in C^2(]a,b[). \tag{1}
$$

Dimostrazione. - Eseguendo la derivazione del termine destro della (1), abbiamo

$$
Ay''+By'+Cy=\frac{p}{r}y''+\frac{p'}{r}y'-\frac{q}{r}y.
$$

Quindi

$$
A=\frac{p}{r}, \qquad B=\frac{p'}{r}, \qquad C=-\frac{q}{r}.
$$

Dalle prime due relazioni otteniamo

$$
\frac{p'}{p}=\frac{B}{A} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{p}{K}=\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx.
$$

Scelto $K=1$ (la costante è completamente arbitraria), otteniamo

$$
\begin{aligned}
p(x)&=\exp\left(\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right),\\
r(x)&=\frac{1}{A(x)}\exp\left(\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right),\\
q(x)&=-\frac{C(x)}{A(x)}\exp\left(\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right).
\end{aligned}
$$

Osserviamo che dalla positività di A e dai valori reali assunti da A e B segue che $p>0$ e $r>0$. Inoltre p, q e r sono analitiche perchè funzioni composte di funzioni analitiche ■.

L'espressione che abbiamo ricavato sopra ha un nome particolare. Diciamo, infatti, che un operatore lineare L è un operatore di *Sturm - Liouville* se

$$
Ly=-\frac{1}{r}(py')'+\frac{q}{r}y,
$$

con y compatibile con l'operatore L e definito sull'intervallo <u>limitato</u> $[a,b]$. Come già richiesto sopra, abbiamo che p, q e r sono analitiche reali in $[a,b]$. C'è tuttavia una aggiunta rispetto alla situazione considerata nel Teeorema 4; richiediamo, infatti, in tutto l'intervallo <u>chiuso</u> (e non solo nel corrispettivo aperto) che

$$p > 0, \qquad r > 0$$

e che $q \geq 0$ (in precedenza su q non c'era vincolo). Se poniamo, poi,

$$B_1 y = \alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a),$$

$$B_2 y = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b)$$

con la condizione

$$\alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0,$$

diciamo che

$$\begin{cases} Ly = \lambda y & \lambda \in \mathbf{R}, \quad x \in]a, b[\\ B_1 y = 0 \\ B_2 y = 0 \end{cases}$$

è un problema di Sturm - Liouville *regolare*.

Osserviamo che se $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (col che $\alpha_i \neq 0$) ci riduciamo alle *condizioni di Dirichlet*

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (col che $\beta_i \neq 0$) ci riduciamo alle *condizioni di Neumann*

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Se, infine, $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ (oppure se $\alpha_2 = \beta_1 = 0$) otteniamo le *condizioni miste*

$$y'(a) = y(b) = 0 \qquad (\text{oppure } \; y(a) = y'(b) = 0).$$

Se riesaminiamo quanto fatto nella Sezione 8 a proposito del metodo di separazione delle variabili, vediamo che ci siamo sostanzialmente trovati a che fare con problemi di Sturm-Liouville, salvo alcune particolarità che preciseremo fra breve.

Nell'introduzione fatta sopra dell'operatore di Sturm - Liouville, non abbiamo precisato il suo dominio. Lo facciamo ora. Definiamo lo spazio

$$L^2_r(a, b) = \{f : [a, b] \to \mathbf{C} \;\; \text{t.c.} \quad \int_a^b |f(x)|^2 r(x)\, dx < +\infty\}$$

che è di Hilbert dotato del prodotto interno

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} r(x)\, dx,$$

e poniamo

$$D_{(L)} = \{f \in L^2_r(a, b) \;\; \text{compatibile con } L \text{ e t.c. } \; B_1 f = B_2 f = 0\}.$$

Abbiamo allora il seguente

Teorema 5. - *L'operatore $L : D_{(L)} \subset L^2_r \to L^2_r$ è hermitiano e semidefinito positivo (quindi gli autovalori sono nonnegativi). Gli autovalori formano, inoltre, un insieme numerabile $\{\lambda_n\}$ e $\lambda_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ (quindi L è non limitato).*

Dimostrazione. - Per mostrare che L è hermitiano, basta mostrare che $\forall\, u,\ v \in D_{(L)}$ risulta

$$(Lu, v) = (u, Lv) \qquad \Leftrightarrow \qquad (Lu, v) - (u, Lv) = 0.$$

Abbiamo, quindi,

$$\begin{aligned}(Lu, v) &= \int_a^b \left(-\frac{1}{r}(pu')' + \frac{q}{r}u\right)\bar{v} r\, dx = \\ &= \int_a^b -(pu')'\bar{v} + qu\bar{v}\, dx; \\ (u, Lv) &= \int_a^b u\overline{\left(-\frac{1}{r}(pv')' + \frac{q}{r}v\right)} r\, dx = \\ &= \int_a^b -u(p\bar{v}')' + qu\bar{v}\, dx,\end{aligned}$$

cioè anche

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_a^b \left(-(pu')'\bar{v} + u(p\bar{v}')'\right)\, dx = \int_a^b \left((pu\bar{v}')' - (pu'\bar{v})'\right)\, dx =$$

$$= [pu\bar{v}' - pu'\bar{v}]_a^b = p(b)u(b)\bar{v}'(b) - p(b)u'(b)\bar{v}(b) - p(a)u(a)\bar{v}'(a) + p(a)u'(a)\bar{v}(a) =$$

$$= p(b)[u(b)\bar{v}'(b) - u'(b)\bar{v}(b)] - p(a)[u(a)\bar{v}'(a) - u'(a)\bar{v}(a)].$$

Osserviamo che se $v \in D_{(L)}$ anche $\bar{v} \in D_{(L)}$ perchè le condizioni in a e in b sono reali. Quindi

$$B_1 u = B_1 \bar{v} = 0$$

che implica

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0 \\ \alpha_1 \bar{v}(a) - \beta_1 \bar{v}'(a) = 0 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè almeno uno dei due $\alpha_1,\ \beta_1$ è diverso da zero, essendo soluzioni di un sistema omogeneo, è necessario che la matrice dei coefficienti sia singolare. Quindi

$$\det \begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(a)\bar{v}'(a) - u'(a)\bar{v}(a) = 0.$$

Ripetendo l'analogo ragionamento per $B_2 u = B_2 \bar{v} = 0$, concludiamo che

$$u(b)\bar{v}'(b) - u'(b)\bar{v}(b) = 0$$

e dunque $(Lu, v) - (u, Lv) = 0$. Mostriamo, ora, che L è semidefinito positivo. Occorre mostrare che $\forall\, u \in D_{(L)}$ risulta $(Lu, u) \geq 0$. Abbiamo

$$(Lu, u) = \int_a^b \left(-\frac{1}{r}(pu')' + \frac{q}{r}u \right) \bar{u}\, r\, dx = \int_a^b [-(pu')'\bar{u} + q|u|^2]\, dx =$$

$$-pu'\bar{u}|_a^b + \int_a^b (p|u'|^2 + q|u|^2)\, dx =$$

$$= -p(b)u'(b)\bar{u}(b) + p(a)u'(a)\bar{u}(a) + \int_a^b (p|u'|^2 + q|u|^2)\, dx.$$

Dalle condizioni $B_1 u = B_2 u = 0$ segue che $u(a)$ e $u'(a)$ sono concordi, mentre $u(b)$ e $u'(b)$ hanno segno opposto, qualora non siano direttamente nulli. In tutti i casi concludiamo che la quantità $(Lu, u) \geq 0$. Essendo L semidefinito positivo, dal Teorema 1 concludiamo che gli autovalori sono tutti nonnegativi. Osserviamo, poi, che L_r^2 è separabile, ossia possiede una base numerabile. Abbiamo, dunque, una quantità numerabile di vettori mutualmente ortogonali. Poichè ad autovalori differenti corrispondono autovettori ortogonali, questi sono al più una quantità numerabile e lo stesso deve valere per gli autovalori.

Tralasciamo la dimostrazione che $\lambda_n \to +\infty$ ∎.

Nella dimostrazione del Teorema 5 abbiamo utilizzato il fatto che gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono mutualmente ortogonali. In realtà possiamo dire di più.

Teorema 6. - *Gli autovettori di un problema di Sturm - Liouville regolare costiuiscono una base per* $L_r^2(a, b)$.

Alla luce di questi risultati, rivediamo i casi trattati nella Sezione 8 con il metodo di separazione delle variabili.

Caso 1 e Caso 2. - Riscritto con la notazione di questa sezione, abbiamo risolto il problema ai limiti

$$\begin{cases} -(X')' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Qui è $p = r = 1$, $q = 0$, $[a, b] = [0, l]$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Inoltre $Ly = -(y')'$ e

$$D_{(L)} = \{f \in L^2(0, l) : \quad f'' \in L^2(0, l), \quad f(0) = f(l) = 0\}.$$

Non stupisce, dunque, che abbiamo trovato autovalori tutti positivi con i corrispondenti autovettori mutualmente ortogonali che costituiscono una base per $L^2(0, l)$.

Caso 3. - Abbiamo risolto

$$\begin{cases} -(\Theta')' = \lambda\Theta \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{cases}$$

Per quanto riguarda p, q, r e la struttura dell'operatore L valgono le condizioni già discusse sopra. Le condizioni al contorno sono condizioni di periodicità, che implicano

$$D_{(L)} = \{f \in L^2(0,2\pi) : \quad f'' \in L^2(0,2\pi), \quad f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi)\}$$

ma che non corrispondono a quanto studiato prima. Tuttavia, se ripetiamo nel nuovo contesto la dimostrazione di simmetria effettuata prima, sfruttando le condizioni di periodicità, otteniamo

$$(Lu,v) - (u,Lv) = p(2\pi)[u(2\pi)\bar{v}'(2\pi) - u'(2\pi)\bar{v}(2\pi)] - p(0)[u(0)\bar{v}'(0) - u'(0)\bar{v}(0)] =$$

$$[p(2\pi) - p(0)][u(0)\bar{v}'(0) - u'(0)\bar{v}'(0)].$$

Dunque basta che $p(0) = p(2\pi)$ (come accade in questo caso) per concludere che l'operatore è comunque hermitiano. Per quanto riguarda la condizione di operatore definito positivo, serve che

$$-p(b)u'(b)\bar{u}(b) + p(a)u'(a)\bar{u}(a) \geq 0$$

che nel nostro caso, sfruttando nuovamente la periodicità, diviene

$$-p(0)u'(0)\bar{u}(0) + p(0)u'(0)\bar{u}(0) \equiv 0$$

e possiamo perciò concludere. Sappiamo, poi, per altra via che il sistema degli esponenziali immaginari $\{e^{in\theta}\}$ con $n \in \mathbf{Z}$ costituisce una base per $L^2(0,2\pi)$.

Caso 4. - Anche se non è così evidente dal procedimento, abbiamo risolto

$$\begin{cases} -R'' - \dfrac{1}{\rho}R' = \lambda R, \quad \rho \in]0,1[\\ \lim\limits_{\rho\to 0^+} R(\rho) \quad \text{esiste finito} \\ R(1) = 0. \end{cases}$$

Sfruttando il Teorema 4, possiamo riscrivere il problema precedente come

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}(\rho\dfrac{dR}{d\rho}) = \lambda R, \quad \rho \in]0,1[\\ \lim\limits_{\rho\to 0^+} R(\rho) \quad \text{esiste finito} \\ R(1) = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $p = r = \rho$, $q = 0$, $]a,b[=]0,1[$. Inoltre

$$Lf = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{df}{d\rho}),$$

$$D_{(L)} = \{f \in L^2_\rho(0,1): \ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{df}{d\rho}) \in L^2_\rho(0,1), \quad f(0) \text{ finito}, \quad f(1)=0\}.$$

L'operatore è ancora del tipo di Sturm - Liouville, ma rispetto alla teoria generale sviluppata prima ci sono due differenze importanti:

a) p e r si annullano in un estremo dell'intervallo in cui è definita la variabile dipendente;

b) le condizioni al contorno non sono quelle previste.

Sembrerebbe, quindi, che non si possa applicare quanto visto in precedenza. Tuttavia, lavorando su questo caso specifico è comunque possibile verificare che si tratta di un operatore hermitiano e definito positivo, i cui autovettori costituiscono una base per il corrispondente spazio di Hilbert.

<u>*Caso 5*</u>. - Nell'ultimo caso abbiamo risolto l'equazione

$$H'' - 2yH' + (\lambda - 1)H = 0, \qquad y \in \mathbf{R},$$

richiedendo che la soluzione H fosse un polinomio, determinando così opportuni valori per λ. In realtà possiamo porre l'equazione nella forma

$$-H'' + 2yH' = \mu H$$

da cui, ancora una volta grazie al Teorema 4, ricaviamo

$$p = e^{-y^2}, \qquad r = e^{-y^2}, \qquad q = 0$$

che ci permette di riscrivere l'operatore nella forma di Sturm Liouville come

$$-e^{y^2}\left(\frac{d}{dy}e^{-y^2}\frac{dH}{dy}\right) = \mu H.$$

Purtroppo anche in questo caso le condizioni al contorno (che ci sono, ma non sono espresse esplicitamente) e la natura dell'intervallo (illimitato!) non ci permettono di applicare la teoria generale vista prima.

Tuttavia, sviluppando metodi ad hoc come nel caso 4, è possibile verificare che l'operatore, su un opportuno dominio, è hermitiano, semidefinito positivo, ha un insieme numerabile e superiormente non limitato di autovalori, i cui corrispondenti autovettori (i polinomi di Hermite) costituiscono una base per lo spazio $L^2_{e^{-y^2}}(\mathbf{R})$. Tutto questo giustifica quanto fatto un po' artificiosamente nella Sezione 8 a proposito dell'oscillatore armonico quantistico e in parte anche per gli altri problemi.

Siamo inoltre in grado di dire di più. I tre operatori

$$L_1 = -\frac{d}{dx},$$

$$L_2 = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right),$$

$$L_3 = -e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} \right)$$

con $L_i : D_{(L_i)} \subset L^2_{r_i} \;\to\; L^2_{r_i}$ sono hermitiani e i rispettivi autovettori costituiscono una base per $L^2_{r_i}$. Possiamo perciò applicare il Teorema 3 e concludere che

$$\forall\, y \in D_{(L_i)} \quad L_i y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y, \varphi_n) \varphi_n \tag{2}$$

che ovviamente semplifica di molto la ricerca della soluzione dell'equazione completa qualora si operi nell'ambito degli spazi di Hilbert.

Dovendo, infatti, risolvere

$$L_i y = h$$

con $L^2_{r_i}$, sviluppando h rispetto alla base degli autovettori e sfruttando la (2), abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (h, \varphi_n) \varphi_n$$

e quindi ricaviamo direttamente

$$(y, \varphi_n) = \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n},$$

ossia i coefficienti dello sviluppo di Fourier della soluzione y. Può accadere che, per i singoli operatori, alcuni coefficienti siano nulli o indeterminati e/o h debba soddisfare a qualche condizione di compatibilità.

Quest'ultimo è un aspetto peculiare della teoria delle equazioni differenziali negli spazi di Hilbert ed è una evidente differenza rispetto a quanto accade con l'approccio classico negli spazi C^k, dove ogni termine noto regolare garantisce l'esistenza di un integrale particolare.