8. Introduzione alle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

Consideriamo alcuni modelli matematici di particolare interesse nelle applicazioni fisiche. Per quanto riguarda la deduzione dei risultati che presentiamo, rimandiamo ai testi di E. DiBenedetto e di L. Debnath indicati nella bibliografia posta al termine di queste dispense.

Legge di conservazione della massa - Consideriamo un fluido ideale comprimibile che riempe una regione Ω dello spazio. Se indichiamo con $\rho = \rho(x, y, z, t)$ la densità del fluido e con $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ la velocità con cui esso si muove, la conservazione della massa è espressa dall'equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad \text{in } \ \Omega \times \mathbf{R}.$$

Questa legge esprime in effetti la conservazione di ogni quantità che si muove in Ω con velocità $\mathbf{v}$.

Equazione del calore - Dalla (1), applicando la legge di Fourier per la conduzione del calore, ricaviamo che l'andamento della temperatura u in un corpo omogeneo che occupa una regione $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ è descritto dall'equazione

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{c} \Delta u = 0 \qquad \text{in } \ \Omega \times \mathbf{R},$$

dove k è la conduttività del corpo e c la sua capacità termica. Una equazione con la stessa struttura descrive la variazione della concentrazione di una sostanza che diffonde in una regione Ω dello spazio. Per questo ci si riferisce alla (2) anche come equazione di diffusione.

Equazione della corda vibrante - Consideriamo una corda elastica di densità lineare ρ costante e lunghezza l, i cui estremi siano fissati (ad esempio in $x = 0$ e in $x = l$). Supponiamo che la corda oscilli nel piano xy ed indichiamo con $u(x, t)$ lo scostamento dalla posizione orizzontale della corda lungo la direzione y nel punto x al tempo t. Se lo scostamento è piccolo e la sezione della corda è trascurabile rispetto alla sua lunghezza, allora si ricava l'equazione

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p}{\rho} \qquad \text{in } \ ]0, l[\times \mathbf{R}$$

dove $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$ con T_0 tensione della corda e p è il carico per unità di lunghezza.

Equazione della membrana vibrante - In condizioni di approssimazione analoghe a quelle del caso precedente, si ricava

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] = \frac{p}{\rho} \qquad \text{in } \ \Omega \times \mathbf{R}$$

dove u è lo scostamento dalla posizione orizzontale d'equilibrio per la membrana elastica tesa nella regione piana Ω.

Equazioni di Navier - Stokes - Il moto di un fluido ideale, incomprimibile e viscoso è descritto dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}_e, \end{cases}$$

dove $\mu > 0$ è la viscosità cinematica, ρ è la densità costante, $\mathbf{f}_e$ è il campo (tridimensionale) delle forze esterne agenti sul sistema e le incognite sono la velocità $\mathbf{v}$ e la pressione p. In questo caso abbiamo a che fare con un sistema di quattro equazioni.

Equazione di Poisson per il potenziale elettrico o gravitazionale - Se f descrive una sorgente esterna, il potenziale u è descritto dall'equazione

$$\Delta u = f.$$

Equazione di Schrödinger stazionaria - Se consideriamo una particella di massa m immersa in un potenziale V, l'andamento della funzione d'onda ψ è descritto dall'equazione

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \Delta \psi + (E - V)\psi = 0$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck ed E è una costante che ha il significato fisico di energia.

Equazione di Korteweg e de Vries - La propagazione di onde acquatiche in bacini poco profondi, nonchè di onde di plasma in mezzi dispersivi è descritta da

$$u_t + (1 + \frac{3}{2}\epsilon u)u_x + \frac{1}{6}\delta u_{xxx} = 0$$

dove ϵ e δ sono parametri fisici costanti.

I precedenti sono tutti casi particolari di *Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali*. Con questo termine intendiamo una relazione tra una funzione incognita $u = u(x, y, \ldots)$ e le sue derivate parziali u_x, u_y, u_{xx}, ... che può essere scritta come

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

dove F è una opportuna funzione di più variabili. In analogia con quanto fatto nella Sezione 1 per le equazioni ed i sistemi differenziali ordinari, *l'ordine* di una equazione differenziale alle derivate parziali è il massimo ordine di derivazione che appare nella (1). Nel seguito ci occuperemo soprattutto di equazioni del primo e secondo ordine.

Diciamo, inoltre, che una equazione è *lineare* se è lineare nell'incognita u e in tutte le sue derivate parziali, con coefficienti che dipendono solo dalle variabili indipendenti. Diciamo che è *quasilineare* se è lineare nelle derivate di ordine massimo.

Può essere utile scrivere l'equazione differenziale, utilizzando la notazione operatoriale

(2).
$$L_x u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

In tal caso, l'equazione è lineare se l'operatore L è lineare (per maggiori approfondimenti su questo, rimandiamo alla Sezione 10). Distinguiamo, poi, fra equazioni *omogenee*, qualora $f = 0$ e non omogenee o complete se $f \neq 0$. La funzione $f(\mathbf{x})$ è normalmente indicata come *termine noto.*

Nel seguito per soluzione noi intenderemo sempre una funzione u, continua con tutte le derivate fino all'ordine massimo individuato dall'equazione, che soddisfa identicamente la (1). Questa nozione corrisponde a quelle che sono ormai comunemente definite come *soluzioni classiche.* Infatti, sia la ricerca matematica in sè, sia il rapporto con le scienze applicate (fisica, chimica, ecc.) hanno portato alla definizione di soluzioni u che possano essere discontinue. In questo caso si parla di *soluzioni deboli.* Benchè si tratti di un campo molto interessante, ricco di profondi risvolti applicativi e tuttora in tumultuosa espansione, noi non ci occuperemo di questo per evidenti problemi di tempo e di spazio.

Sempre in analogia con quanto si fa con le equazioni differenziali ordinarie, con *integrale generale* di una equazione alle derivate parziali intendiamo la totalità delle soluzioni u (nel senso indicato sopra). La differenza sostanziale con le equazioni ordinarie sta nel fatto che mentre queste ultime dipendono da costanti arbitrarie in numero pari all'ordine dell'equazione, nel caso delle derivate parziali, l'integrale generale di una equazione di ordine N dipende da N <u>funzioni</u> arbitrarie. Si capisce, dunque, come da un lato in generale non sia molto interessante determinare l'integrale generale e dall'altro sia necessario imporre opportune condizioni per individuare una determinata soluzione fra le infinite possibili. Da qui nascono svariati tipi di condizioni possibili, fra le quali particolare interesse ha il *Problema di Cauchy* o *ai valori iniziali* che, nel caso di una equazione di ordine N nelle due variabili indipendenti x e y, consiste nell'assegnare lungo una prefissata linea Γ del piano xy i valori della u e di tutte le sue derivate parziali fino all'ordine $N-1$. Sul Problema di Cauchy e su altri tipi di condizioni torneremo poi con più dettagli nelle Sezioni successive.

Un discorso particolare nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali merita il *Principio di sovrapposizione.* Nel caso di una equazione differenziale ordinaria lineare di ordine N, come ampiamente visto nella Sezione 1, esistono N soluzioni z_1, z_2, ... z_N linearmente indipendenti ed ogni altra soluzione u è rappresentata come una opportuna combinazione lineare

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \, z_i.$$

Nel caso di una equazione alle derivate parziali lineare omogenea, per quanto detto sopra a proposito dell'integrale generale, esistono infinite soluzioni linearmente indipendenti z_1, z_2, ... e può dunque capitare che la combinazione lineare infinita

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, z_n \tag{3}$$

non sia affatto una soluzione del problema originario. Questo può essere garantito solo nel caso esista un numero finito di soluzioni indipendenti. Nel caso generale, andrà verificato volta per volta e ciò si riduce ad una doppia verifica:

a) controllare che la serie in (3) converga in un opportuno senso, da precisare in stretta dipendenza con il problema in esame;

b) verificare che

$$L_x u(\mathbf{x}) = L_x \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, L_x z_n(\mathbf{x}).$$

La costruzione di un insieme infinito di soluzioni che verifichino queste proprietà avviene normalmente con il cosiddetto *metodo di separazione delle variabili*, che tratteremo nella Sezione 10 e che trova la sua giustificazione, fra il resto, nell'ambito della teoria degli operatori simmetrici o hermitiani, che svilupperemo nei suoi tratti essenziali nelle Sezioni 12 e 13.

Un'altra importante nozione nell'ambito della teoria delle equazioni alle derivate parziali (ma non solo!) è il concetto di problema *ben posto*, originariamente introdotto da Hadamard. Se analizziamo la forma della (2), possiamo dire, in termini molto generali, che la risoluzione di una equazione differenziale consiste nella ricerca di una funzione u appartenente ad uno spazio funzionale $\mathcal{U}$ quando siano assegnati opportuni dati f (pensando con ciò sia al termine noto, sia alle condizioni del tipo Cauchy o altro) in un altro spazio funzionale $\mathcal{F}$.

Diciamo allora che il problema che corrisponde alla coppia (u, f) è *ben posto secondo Hadamard* se valgono le seguenti due condizioni

a) $\forall f \in \mathcal{F}$ esiste ed è unica $u \in \mathcal{U}$, ossia i dati assegnati devono essere tutti e soli quelli necessari per determinare univocamente la soluzione;

b) la soluzione dipende con continuità dai dati, ossia piccole variazioni nei dati f comportano piccole variazioni nella soluzione u.

Qualora $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$ siano entrambi spazi normati, se u è la soluzione corrispondente a f e v è la soluzione corrispondente a g, allora la condizione b) si esprime dicendo che deve esistere una costante c, indipendente da f e g, tale che

$$\|u - v\|_{\mathcal{U}} \leq c\|f - g\|_{\mathcal{F}}.$$

Sinteticamente, la nozione di problema ben posto esprime il fatto che la formulazione matematica di un certo problema ha una interpretazione fisica.

I problemi che non rientrano nella definizione precedente si dicono *mal posti*. Vedremo, ad esempio, che per le equazioni ellittiche il Problema di Cauchy risulta mal posto. Questo non stupisce perchè le equazioni ellittiche descrivono in genere fenomeni fisici di natura stazionaria, mentre le condizioni di Cauchy sono in effetti condizioni iniziali per un problema di carattere evolutivo.

Tale situazione non va comunque generalizzata: ci sono infatti molti problemi di notevole importanza in Fisica Matematica che sono mal posti e hanno un grande interesse. Tuttavia nel seguito non avremo occasione di considerare tale tipo di problemi.

Dovrebbe ora risultare chiaro che il panorama della teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali è estremamente variegato e non è, quindi, minimamente pensabile di darne una panoramica esaustiva. Noi ci concentreremo nelle prossime sezioni su alcuni problemi e tecniche di maggiore frequenza nelle applicazioni, senza con ciò voler intendere che quanto trascurato sia di scarso interesse o poco significativo.