1. Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione funzionale che lega fra loro la variabile indipendente x, la variabile dipendente y e le derivate di questa fino ad un certo ordine N:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(N)}) = 0$$

con $F : D \subset \mathbf{R}^{N+2} \to \mathbf{R}$, dove D è un generico sottoinsieme sul quale, per il momento, non facciamo ipotesi particolari. Esempi di equazioni differenziali si incontrano comunemente in Fisica, nei diversi settori dell'Ingegneria, in Biologia, ecc.

In questa sezione (e in alcune delle seguenti) tratteremo le equazioni ordinarie, mentre più avanti ci occuperemo delle equazioni alle derivate parziali, in cui intervengono incognite che sono funzioni di più variabili, insieme alle loro derivate fino ad un certo ordine N, del tipo

$$F(\underline{x}, u(\underline{x}), Du, D^2u, \ldots, D^N u) = 0.$$

Da un punto di vista generale, val la pena di osservare che le equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali) sono un caso più generale delle equazioni funzionali, equazioni in cui l'incognita è una funzione. Fra queste ricordiamo le equazioni con ritardo, le equazioni integrali, le equazioni alle differenze, ecc. Entriamo, ora, nel vivo del nostro problema.

Definizione. - Diciamo che una equazione è *in forma normale*, quando è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo

$$y^{(N)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(N-1)});$$

l'equazione si dice *autonoma* quando non appare la variabile indipendente in modo esplicito; l'equazione si dice *lineare* se ha la forma

$$a_0 y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_N y = f(x).$$

Infine *ordine* dell'equazione è il massimo ordine di derivazione che appare per la variabile dipendente $\blacksquare$.

Oltre alle equazioni differenziali, possiamo poi considerare i sistemi di equazioni differenziali, come ad esempio

$$\begin{cases} y^{(N)} = f(x, y, z, y', z', \ldots, y^{(N-1)}, z^{(N-1)}) \\ z^{(N)} = g(x, y, z, y', z', \ldots, y^{(N-1)}, z^{(N-1)}). \end{cases}$$

Vale la pena di osservare che equazioni e/o sistemi di equazioni differenziali si possono sempre equivalentemente riscrivere come sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. Infatti, consideriamo a puro titolo esemplificativo l'equazione del terzo ordine

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

Ponendo $y' = u$ e $u' = v$ l'equazione si riscrive come

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = f(x, y, u, v). \end{cases}$$

Si capisce, dunque, che sviluppare la teoria per sistemi differenziali del primo ordine garantisce la massima generalità possibile. Introducendo la notazione vettoriale, consideriamo il generico sistema in forma normale di N equazioni del primo ordine

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \qquad \underline{f} : D \subseteq \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^N. \tag{1}$$

Abbiamo allora

Definizione. - Definiamo soluzione del sistema (1) una funzione $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$, dove I è un intervallo, che sia differenziabile in I e tale che

1) $\forall\, x \in I \quad (x, \varphi(x)) \in D$ (che è come dire che $\operatorname{graf} \varphi \subset D$);
2) $\forall\, x \in I \quad \varphi'(x) \equiv \underline{f}(x, \varphi(x)) \quad$ ■.

Se consideriamo ora l'equazione $y' = y$, è facile verificare che essa ha ∞^1 soluzioni diverse di espressione $y = C\, e^x$, dipendenti da una costante arbitraria. Analogamente, prendendo in esame l'equazione $y'' = -y$, essa ha ∞^2 soluzione diverse di espressione $y = A \cos x + B \sin x$, dipendenti da due costanti arbitrarie. È del tutto naturale chiedersi se questo sia un caso o se non nasconda un fatto più importante. In effetti vale la seguente

Proposizione 1. - *Un sistema di N equazioni differenziali del primo ordine ha ∞^N soluzioni diverse, dipendenti da N costanti arbitrarie.*

Questo risultato ha condotto storicamente al primo problema studiato per le equazioni differenziali. Vogliamo ora, in forma estremamente sintetica, considerare i principali problemi che si possono porre sulle equazioni ordinarie.

Problema 1. - Dato $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$, determinare la famiglia di funzioni dipendente da N parametri che esprime la totalità delle ∞^N soluzioni diverse. Avremo, dunque, $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_N)$. Questo problema, per la pratica impossibilità di avere una soluzione esplicita salvo casi molto semplici, è stato presto abbandonato in favore di altri problemi, maggiormente legati alle applicazioni ■.

Problema 2. - Determinare la soluzione di

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

Poichè la soluzione generale dipende da N costanti arbitrarie, sembra ragionevole pensare che imponendo N condizioni, ci si riduca ad un'unica soluzione. Parliamo in questo caso di <u>Problema di Cauchy</u>. Quello che interessa è l'esistenza locale della soluzione, ossia in un intorno centrato in x_0. A priori, però, non è dato alcun vincolo sull'ampiezza di tale intervallo $\blacksquare$.

Problema 3. - È il cosiddetto Problema ai limiti. Limitandoci per semplicità al caso delle equazioni del secondo ordine, è il problema di determinare y tale che

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) = \alpha \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = \beta \end{cases}$$

dove $a < b$. In questo caso la filosofia è completamente diversa rispetto al caso precedente, perchè è assegnato a priori l'intervallo in cui si richiede l'esistenza della soluzione. L'origine del nome di questo problema deriva chiaramente dall'imposizione di condizioni ai limiti dell'intervallo di interesse $\blacksquare$.

Problema 4. - In svariate applicazioni risulta molto importante verificare la *dipendenza continua* delle soluzioni dai dati iniziali. In termini forzatamente imprecisi, si desidera che per condizioni iniziali fra loro vicine (in un senso di volta in volta da specificare), le corrispondenti soluzioni siano anch'esse fra loro vicine (sempre in un senso da indicare opportunamente). Se, infatti, per piccole variazioni nei dati, le soluzioni risultassero fra loro molto diverse, nell'applicazione corrispondente sarebbe necessario un controllo molto stretto sulle variabili in gioco per ottenere il comportamento desiderato $\blacksquare$.

Problema 5. - Direttamente collegato alla dipendenza continua c'è il problema della *stabilità*: per tempi arbitrariamente grandi, si è interessati alla vicinanza per soluzioni di condizioni iniziali vicine $\blacksquare$.

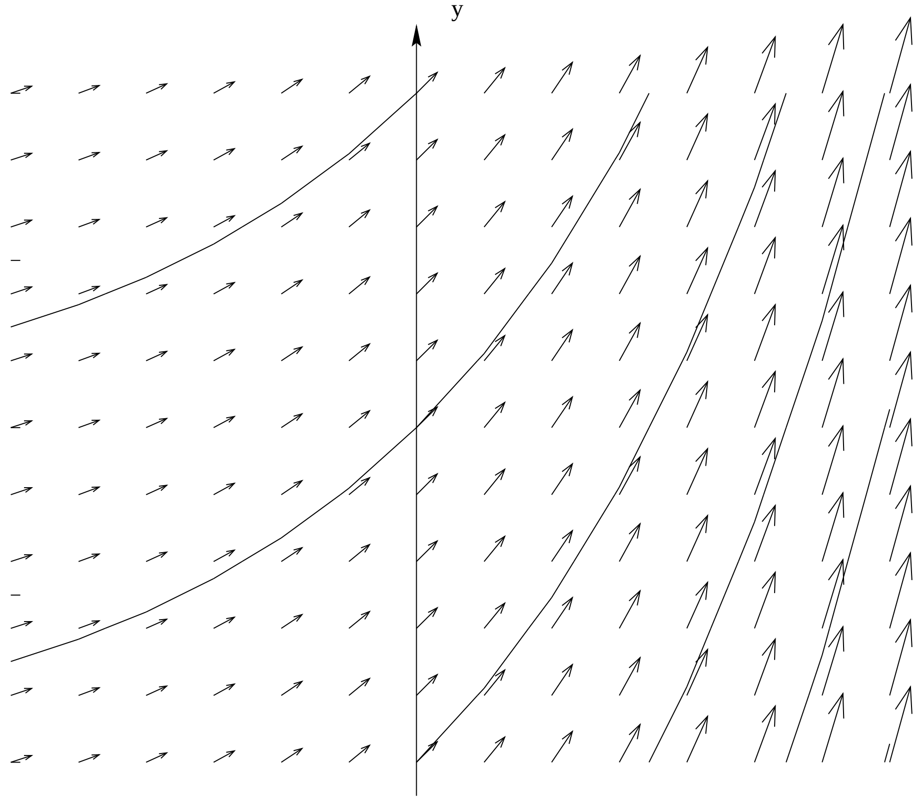
Problema 6. - Per Problemi di Cauchy e ai limiti per i quali non è possibile dare una soluzione in forma esplicita, si è interessati alle *proprietà qualitative* della soluzione. Con questo si intende l'intervallo massimale di esistenza, la regolarità della soluzione ed anche la possibilità di tracciarne un grafico $\blacksquare$.

Nel seguito non sarà ovviamente possibile entrare nel dettaglio per tutti i problemi sopra elencati. Ci limiteremo a trattare il Problema 2 e il Problema 3; su quest'ultimo torneremo in seguito considerando le Equazioni alle Derivate Parziali e il metodo di separazione delle variabili. Diremo anche qualcosa sull'andamento qualitativo delle soluzioni, presentando i Teoremi di esistenza ed unicità in grande. Nella Bibliografia finale posta al termine di queste dispense saranno inoltre indicati alcuni testi per approfondire molte delle tematiche qui semplicemente abbozzate.

Osservazione. - Considerando l'equazione

$$y' = f(x, y) \qquad f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},$$

per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, essa assegna una direzione con la coppia $(1, y'(\bar{x})) \equiv (1, f(\bar{x}, \bar{y}))$. Possiamo, dunque, pensare che l'equazione assegni un campo di direzioni.



Nella figura sopra è riportato il campo di direzioni associato all'equazione $y' = y$.

Prima di formulare il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo, che fornisce una condizione sufficiente per rispondere al Problema 2 illustrato in precedenza, premettiamo una

Definizione. - Data $f : D \subseteq \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^N$ con D aperto, f si dice localmente lipschitziana rispetto a y, uniformemente in x se $\forall\,(x_0, \underline{y}_0) \in D$ esiste un intorno $I_{(x_0,\underline{y}_0)}$ ed una costante $L > 0$ tale che

$$\|\underline{f}(x, \underline{y}_1) - \underline{f}(x, \underline{y}_2)\|_{\mathbf{R}^N} \leq L\|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\|_{\mathbf{R}^N} \quad \forall\,(x, \underline{y}_1),\ (x, \underline{y}_2) \in\ I_{(x_0,\underline{y}_0)} \quad \blacksquare.$$

Osservazione. - In generale la costante L varierà al variare di $(x_0, \underline{y}_0)$ nell'aperto D. La condizione di ipschitzianità locale, inoltre, equivale a richiedere limitatezza al rapporto incrementale rispetto a y nell'intorno del punto considerato $\blacksquare$.

Proposizione 2. - *Se* $\underline{f}$ *e* $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}$ *sono tutte continue in* D*, allora* $\underline{f}$ *è localmente lipschitziana rispetto a* y *uniformemente in* x*.*

Possiamo perciò finalmente enunciare il

Teorema 1 (di esistenza ed unicità in piccolo). - *Sia* $\underline{f} : D \subseteq \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^N$*,* D *aperto e* $(x_0, y_0) \in D$*. Allora se* $\underline{f} \in C^0(D)$ *e* $\underline{f}$ *è localmente di Lipschitz rispetto a* y*, uniformemente in* x*, allora esiste un intorno* $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *nel quale è definita una* *soluzione* $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}(x)$ *del Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione del medesimo problema coincide con $\underline{\varphi}$ *nel comune intervallo di definizione.*

Teorema 2 (di sola esistenza). - *Sia* $\underline{f} : D \subseteq \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^N$, *D aperto e* $(x_0, y_0) \in D$. *Allora se* $\underline{f} \in C^0(D)$, *allora esiste un intorno* $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *nel quale è definita almeno una soluzione* $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}(x)$ *del Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

Osservazione. - Come già accennato sopra, entrambi i Teoremi forniscono una condizione sufficiente per unicità ed esistenza o solo esistenza della soluzione. Inoltre è fondamentale che l'insieme D considerato sia aperto. Nel seguito, per semplicità, considereremo la continuità della $\underline{f}$ e delle sue derivate parziali, anzichè la locale lipschitzianità rispetto a y. Infine, per la continuità della $\underline{f}$ assunta per ipotesi, risulta automaticamente che $\underline{\varphi}$ non solo è differenziabile, ma addirittura di classe C^1. ■.

Illustriamo i risultati precedenti con alcuni esempi per problemi scalari. Per fissare le idee, indichiamo con D l'aperto di sola continuità per f e con D^* l'aperto di continuità per f e per la sua derivata parziale rispetto a y.

CASO I - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

In questo caso $(x_0, y_0) = (0, 1) \in D^*$ e quindi possiamo garantire che $y = e^x$ è l'unica soluzione.

CASO II - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $D = \mathbf{R}^2$ e $D^* = \mathbf{R}^2 \backslash \{y = 0\}$. In questo caso $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \partial D^*$, ma $(0, 0) \in D$. Quindi non vale il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo, ma possiamo comunque garantire l'esistenza di almeno una soluzione. In effetti non è difficile verificare che sono soluzioni (fra il resto) le funzioni

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 = \frac{1}{3}x^3, \quad y_3 = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1)^3 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

CASO III - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\text{arcsin}y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $D = D^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |y| < 1\}$. In questo caso $(x_0, y_0) = (0, 1) \in \partial D^* \cap \partial D$. Quindi non vale il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo, ma neppure quello di sola esistenza. Con un po' di fatica si verifica che tale Problema di Cauchy non ammette soluzioni.

CASO IV - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + \sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $D = D^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 0\}$. La situazione è analoga a quella dell'esempio precedente, perchè $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \partial D^* \cap \partial D$. Svolgendo i calcoli non è difficile verificare che

$$2\sqrt{y} - 2\ln(1 + \sqrt{y}) = x$$

è l'unica soluzione del Problema di Cauchy, benchè in base alla teoria non fosse neppure possibile prevederne la semplice esistenza a priori.

CASO V - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che $D = D^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y > 0\}$. La situazione è ancora analoga a quella del caso III, perchè $(x_0, y_0) = (0, 0) \in \partial D^* \cap \partial D$. Svolgendo i calcoli non è difficile verificare che sono soluzioni (fra il resto) le due funzioni

$$y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{x^2}{4}.$$

Definizione. - Nel seguito chiameremo *integrale particolare* la soluzione di un problema di Cauchy dato nell'aperto D in cui f e $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ sono continue; chiameremo, inoltre, *integrale generale* la totalità degli integrali particolari ∎.

L'affermazione contenuta nella precedente osservazione riguardo alla maggiore regolarità della soluzione (di classe C^1 anzichè semplicemente differenziabile) può essere ulteriormente estesa, ovviamente sotto opportune ipotesi sulla f. Abbiamo, infatti, la

Proposizione 3. - *Se $\underline{f} \in C^k(D)$ con $k \geq 0$ intero, allora una soluzione $\underline{\varphi}$ dell'equazione $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$ è di classe C^{k+1} nel suo dominio; se, poi, $\underline{f}$ è di classe C^∞ o addirittura analitica, lo stesso vale per $\underline{\varphi}$.*

Il Teorema 1 lascia completamente indeterminata l'ampiezza dell'intervallo in cui l'unica soluzione è definita. Benchè la sua dimostrazione dia in effetti una stima sulle dimensioni dell'intervallo, è naturale chiedersi se in qualche modo esse non possano essere determinate a priori, grazie ad opportune ipotesi sulla f e/o sulle condizioni iniziali. La risposta a questo interrogativo è positiva ed è fornita dal

Teorema 3 (di esistenza ed unicità in grande). - *Sia* $S =]a, b[\times \mathbf{R}^N$. *Supponiamo che* $\underline{f}$ *sia definita in tutto* $\overline{S}$ *e che in* S *valgano le ipotesi fatte sulla* $\underline{f}$ *nel Teorema 1. Se, inoltre, esistono due costanti nonnegative* L_1 *e* L_2 *t.c.*

$$\forall\,(x, \underline{y}) \in \overline{S} \qquad |\underline{f}(x, \underline{y})| \leq L_1 + L_2|\underline{y}|,$$

allora $\forall\,(x_0, y_0) \in S$ *la corrispondente unica soluzione del Problema di Cauchy è definita in tutto* $[a, b]$.

Osservazione. - Il Teorema richiede sostanzialmente che la $\underline{f}$ abbia un andamento al più lineare rispetto a $|y| \to +\infty$. Se, poi, b si può prendere arbitrariamente, allora la soluzione è indefinitamente prolungabile a destra; analogamente per quanto riguarda a e la prolungabilità a sinistra. Abbiamo, quindi, informazioni abbastanza precise sull'insieme di definizione della soluzione ■.

Osservazione. - La condizione di crescita al più lineare è verificata in particolare se

1) $\underline{f}$ è limitata in $\overline{S}$;
2) le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ sono continue e limitate in $\overline{S}$ ■.

Esercizio. - Utilizzando il Teorema 2, verificare che per entrambi i seguenti Problemi di Cauchy esiste unica la soluzione di classe C^1 in tutto $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y' = x \operatorname{arctag} y \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sqrt[4]{1 + y^4} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Determinare, quindi, l'effettiva regolarità della soluzione, usando la Proposizione 2 ■.

Ci possiamo anche chiedere cosa accade agli estremi dell'intervallo di definizione della soluzione, quando essa non sia ulteriormente prolungabile. A questo riguardo abbiamo il seguente

Teorema 4 (di prolungamento). - *Sia* $D \subset \mathbf{R}^{N+1}$ *un aperto,* $\underline{f} : D \to \mathbf{R}^N$ *continua e localmente lipschitziana in* y*, uniformemente rispetto a* x *in* D *e sia* $(x_0, \underline{y}_0) \in D$. *Sia* $\underline{y} = \underline{y}(x)$ *la soluzione non ulteriormente prolungabile del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

Se $c = \sup I < +\infty$, *allora deve verificarsi uno dei seguenti fenomeni:*

a) $\underline{y}'$ *non è limitato nell'intorno sinistro di c;*
b) $\lim_{x\to c^-} \underline{y}(x) = \underline{w}$ *finito e* $(c, \underline{w}) \in \partial D$.

Osservazione. - Naturalmente analogo enunciato vale per $d = \inf I > -\infty$ ∎.

Osservazione. - Il caso a) corrisponde sostanzialmente alla situazione in cui $\underline{y}$ ha in c un asintoto verticale. Il caso b) corrisponde al fatto che il grafico di $\underline{y}$ ha raggiunto la frontiera di D, per cui i Teoremi di esistenza ed unicità o di sola esistenza cessano di valere ∎.

Per cogliere meglio cosa può accadere, vediamo un paio di esempi.

Caso I. - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Benchè $D \equiv \mathbf{R}^2$, l'unica soluzione è $y = \frac{1}{1-x}$ definita in $I =]-\infty, 1[$. Questo corrisponde al caso a).

Caso II. - Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Qui abbiamo $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y \neq 0\}$; l'unica soluzione è $y = \sqrt{1-2x}$ definita in $I =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Nel punto $x = \frac{1}{2}$ la soluzion raggiunge la frontiera di D e questo corrisponde al caso b).

Osservazione. - Nel caso in cui $D = \mathbf{R}^{N+1}$, è chiaramente importante poter concludere che $I = \mathbf{R}$. Da questo punto di vista è importante sapere a priori se le soluzioni sono limitate oppure no. In tal caso, infatti, attraverso la stessa equazione differenziale è possibile concludere che la $\underline{y}'$ è limitata e, dunque, di escludere il caso a). Ad esempio, per il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

è facile vedere che $D = \mathbf{R}^2$, ma che il Teorema 3 non si può applicare, perchè la f cresce troppo. D'altro canto, $y = 1$ e $y = 0$ sono integrali particolari dell'equazione differenziale e, per il Teorema 1, la nostra soluzione non li può attraversare; essa deve restare, dunque, limitata, escludendo la possibilità che y' diverga. Essendo vuota la frontiera di D, possiamo concludere che la soluzione è forzatamente definita su tutto $\mathbf{R}$ ∎.