CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 9

1) Si consideri lo spazio $X = C^0[(0,1)]$ munito dell'usuale norma dell'estremo superiore rispetto alla quale è completo. Le due successioni

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1},$$

$$g_n(x) = x^n - x^{2n}$$

sono convergenti in X?

2) Si consideri la successione

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Verificare che essa è convergente sia in

$$C^[(0,1)] \qquad \text{con} \qquad \|f\|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

sia in

$$C^1[(0,1)] \qquad \text{con} \qquad \|f\|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

3) Dato lo spazio di Hilbert $L^2(-1,1)$ dotato dell'usuale prodotto interno, si consideri l'insieme

$$\mathcal{P} = \{p : \ p \text{ è un polinomio di grado } \leq 1\}.$$

1) Verificare che $\mathcal{P}$ è una varietà lineare.
2) Dire se $\mathcal{P}$ è chiuso e determinarne una base ortonormale.
3) Caratterizzare la proiezione su $\mathcal{P}$ di una $f \in L^2(-1,1)$ pari.
4) Caratterizzare la proiezione su $\mathcal{P}$ di una $f \in L^2(-1,1)$ dispari.

4) Dato lo spazio di Hilbert

$$L^2_{e^{-x}}(0,+\infty) = \{f : [0,+\infty[\to \mathbf{R} : \ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2\, e^{-x}\, dx < +\infty\},$$

munito del prodotto interno

$$(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\, dx,$$

si consideri la varietà lineare $Z \subset L^2_{e^{-x}}(0, +\infty)$ generata dai vettori

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = x^2.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali.

5) Dato lo spazio di Hilbert

$$H^1(-1,1) = \{f \in L^2(-1,1): \quad f' \in L^2(-1,1)\},$$

munito del prodotto interno

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx,$$

si consideri la varietà lineare $Z \subset H^1(-1,1)$ generata dai vettori

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = x^2.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali.

6) Sia $H^1(-1,1)$ lo spazio di Hilbert dell'esercizio precedente e $C^1([-1,1])$ lo spazio delle funzioni continue in $[-1,1]$ con la derivata continua nel medesimo intervallo. Verificare che se $f \in H^1$ e $g \in C^1$, allora $h = fg$ appartiene a H^1.

7) Difficile - Sia $H^1(-1,1)$ lo spazio di Hilbert dell'esercizio 5 e $H^1_0(-1,1)$ il suo sottospazio definito da

$$H^1_0(-1,1) = \{f \in H^1(-1,1) \text{ t.c. } f(-1) = f(1) = 0\}.$$

Verificare che il sottospazio ortogonale $\left(H^1_0(-1,1)\right)^{\perp}$ è una varietà lineare di dimensione 2 la cui base è data dai vettori $v_1 = e^x$, $v_2 = e^{-x}$.

8) Classificare ciascuna delle seguenti equazioni
1) $x^2u_{xx} + 4yu_{xy} + u_{yy} + 2u_x = 0;$
2) $3yu_{xx} - xu_{yy} = 0;$
3) $yu_{xx} - 2u_{xy} + e^x u_{yy} + x^2u_x - u = 0.$

9) Utilizzando il metodo di separazione delle variabili, risolvere il problema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V^2}u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < l \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < l. \end{cases}$$

[**Suggerimento -** Risolvendo l'equazione differenziale in X, assumere direttamente $\lambda = k^4$ positivo. Si noti che il valore di k risulta determinato da una equazione trascendente che non può essere risolta esplicitamente.]

10) Utilizzando il metodo di separazione delle variabili, risolvere il problema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V^2} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \qquad 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0 \qquad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < l \\ u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < l. \end{cases}$$

11) Utilizzando la trasformata di Laplace risolvere il problema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V^2} u_{tt} - u_{xx} = \sin \dfrac{\pi x}{a} \qquad 0 < x < a, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < a \\ u(0,t) = u(a,t) = 0 \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

12) Risolvere il Problema di Cauchy

$$(y+u)u_x + y u_y = x - y,$$

con $u = 1 + x$ lungo $y = 1$.

13) Risolvere il Problema di Cauchy

$$(y+u)u_x + y u_y = x - y,$$

con $u = x^2$ lungo $y = 0$.