CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 3

NOTA GENERALE - Nel seguito, dato un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$, con la notazione $C^0(I)$, $L^1(I)$, $L^2(I)$, indicheremo i seguenti spazi normati, con le relative norme:

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbf{R} : \ f \text{ continua in } I\}, \quad \|f\|_{C^0} = \sup_{x \in I} |f(x)|;$$

$$L^1(I) = \{f : I \to \mathbf{R} : \ \int_I |f(x)|\,dx < +\infty\}, \quad \|f\|_{L^1} = \int_I |f(x)|\,dx;$$

$$L^2(I) = \{f : I \to \mathbf{R} : \ \int_I |f(x)|^2\,dx < +\infty\}, \quad \|f\|_{L^2} = \left(\int_I |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1) Data la successione $\{f_n\} \subset L^1(0, +\infty)$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^4},$$

verificare che per $n \to +\infty$, la successione converge a zero in $L^1(0, +\infty)$.

2) Si consideri la successione di funzioni continue $\{f_n\}$, periodiche di periodo $T = 2^{1-n}$ definite ponendo

$$f_n(x) = \sqrt[4]{n}\, 2^{n^2} |x - 2^{-n}|^n, \qquad x \in [0, 2^{1-n}].$$

Verificare che per $n \to +\infty$ la successione converge a zero in $L^1(0, 1)$. Dire, poi, se la successione converge a zero anche in $C^0([0, 1])$.

3) Si consideri la successione di funzioni $\{u_n\}$ definita da

$$u_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}.$$

a) Dire se $\{u_n\} \subset L^1(\mathbf{R})$;
b) dire se $\{u_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$;
c) studiare l'eventuale convergenza della successione in $L^1(\mathbf{R})$ al tendere di n a $+\infty$;
d) studiare l'eventuale convergenza della successione in $C^0(\mathbf{R})$ al tendere di n a $+\infty$.

4) Posto $u_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-n^2x^2}$ con $x \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ studiare la convergenza di u_n a zero al tendere di n a $+\infty$ in $C^0(\mathbf{R})$, $L^1(\mathbf{R})$, $L^2(\mathbf{R})$.

5) Si consideri la successione $\{f_n\}$ definita ponendo

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi n^2} \sqrt{n^2 - x^2}\, \chi_{[-n,n]}(x).$$

Studiare la convergenza della successione in $C^0(\mathbf{R})$, $L^1(\mathbf{R})$, $L^2(\mathbf{R})$ al tendere di n a $+\infty$.