CORSO di LAUREA SPECIALISTICA in INGEGNERIA ELETTRONICA e delle TELECOMUNICAZIONI

ESERCIZI DI MODELLI E METODI MATEMATICI I - FOGLIO 0

1) Sia data l'equazione differenziale

$$y' = 1 + \arctan y^2.$$

a) Verificare che l'integrale generale è definito su tutto $\mathbf{R}$ e di classe C^∞.

b) Mostrare che le linee integrali non possono avere asintoti orizzontali.

c) Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali.

2) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{1 + y^2},$$

a) determinare l'insieme di definizione delle linee integrali in base alla teoria.

b) Studiare il segno di y' nel piano (x, y) e disegnare il luogo dei punti ove y' si annulla.

c) Sfruttando i risultati dei punti precedenti, tracciare il grafico qualitativo delle linee che passano per $P_1(-1, -1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(0, 0)$.

3) Tracciare un grafico approssimato delle linee integrali di

$$y' = (y^2 - 1)e^{y^2}.$$

4) Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali dell'equazione differenziale

$$y' = y(1 - e^{x^2}).$$

5) Disegnare il grafico qualitativo delle linee integrali di

$$y' = \frac{y(y-1)}{1 + y^2}.$$

6) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'_\alpha = y_\alpha \sin(e^x + y_\alpha) - e^x \\ y_\alpha(0) = \alpha \qquad\qquad \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ esiste un'unica $y_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ soluzione del problema di classe C^∞ e tracciare un grafico qualitativo della soluzione y_α quando $\alpha \in (-1 - 2\pi, -1 - \pi)$.

7) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y+x)e^{-|y|} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tracciare un grafico qualitativo della soluzione e dimostrare che essa è di classe C^∞.

8) Sia data l'equazione differenziale

$$y' = x(\exp(\frac{1}{y^2}) - e).$$

a) Indicare l'insieme $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ in cui è possibile garantire l'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo a $(x_0, y_0) \in \Omega$;

b) studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione e tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali nell'ipotesi che il numero dei flessi sia il minimo possibile;

c) sulla base dello studio svolto, dire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy $y(0) = \lambda$ è sicuramente prolungabile su $\mathbf{R}$ e per quali λ essa è anche limitata.