Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Ugo Gianazza)

Esercizi in preparazione alla I prova in itinere

Dott. Antonio Marigonda [1]

Pavia, 9 Novembre 2007

1 Integrali di funzioni trigonometriche

Esercizio 1.1. Calcolare il seguente integrale al variare di $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + 2\cos t}\, dt.$$

Soluzione 1.1. Poniamo $z = e^{it}$. Grazie alle formule di Eulero, si ha che $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma \frac{z^n}{5 + (z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{z^n}{z^2 + 5z + 1}\, dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. La funzione integranda $f(z) = z^n/(z^2+5z+1)$ è singolare per $z^2+5z+1 = 0$ ovvero nei punti $z_1 = (-5+\sqrt{21})/2$ e $z_2 = (-5-\sqrt{21})/2$, si tratta di poli semplici. Stabiliamo quali singolarità sono contenute all'interno di γ. Si ha $|z_2| = (5+\sqrt{21})/2 > 5/2 > 1$, quindi z_2 non è interno a γ. D'altra parte, si ha $|z_1| = (5-\sqrt{21})/2$. Si ha $5-\sqrt{21} < 2$, ovvero $|z_1| < 1$, perché $21 > 9$, quindi z_2 è interno a γ. E' possibile pertanto applicare la formula dei residui:

$$\frac{1}{i} \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \text{Res}(f; z_1).$$

Il calcolo del residuo è immediato:

$$\text{Res}(f; z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{z_1^n}{\sqrt{21}}$$

L'integrale richiesto vale quindi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{5 + 2\cos t}\, dt = \pi \frac{(-5 + \sqrt{21})^n}{2^{n-1}\sqrt{21}}.$$

Esercizio 1.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} e^{5it} \sin(6t)\, dt.$$

Soluzione 1.2. Grazie alle formule di Eulero, si ha che $e^{5it} = \cos(5t) + i\sin(5t)$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\int_0^{2\pi} e^{5it} \sin(6t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(5t)\sin(6t)\, dt + i \int_0^{2\pi} \sin(5t)\sin(6t)\, dt.$$

Ricordando a questo punto che per $m, n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\
\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}, \\
\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((m+n)x) - \sin((m-n)x)\, dx = 0,
\end{aligned}$$

[1] Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

si conclude che l'integrale richiesto è nullo.

Esercizio 1.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} e^{3(\cos x + i\sin x)} \cos(x)\, dt.$$

Soluzione 1.3. Posto $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, grazie alle formule di Eulero, si ha che $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, pertanto l'integrale richiesto vale

$$\frac{1}{2}\int_\gamma e^{3z}\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_\gamma e^{3z}(1 + 1/z^2)\, dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma e^{3z}\, dz + \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{e^{3z}}{z^2}\, dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. Poiché e^{3z} è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, si ha che il suo integrale calcolato lungo γ è nullo. La funzione e^{3z}/z^2 presenta in z_0 un polo doppio. Si ha pertanto

$$\mathrm{Res}(e^{3z}/z^2; 0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 \cdot \frac{e^{3z}}{z^2}\right) = 3,$$

e l'integrale richiesto vale

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{e^{3z}}{z^2}\, dz = \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i \mathrm{Res}(e^{3z}/z^2; 0) = 3\pi.$$

Esercizio 1.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2 + \sin t}\, dt.$$

Soluzione 1.4. Si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2 + \sin t}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t + 2 - 2}{2 + \sin t}\, dt = 2\pi - 2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Posto $z = e^{it}$, grazie alle formule di Eulero si ha $\sin t = \frac{1}{2i}(z - 1/z)$, pertanto

$$2\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = 2\int_\gamma \frac{1}{2 + \frac{z - 1/z}{2i}}\frac{dz}{iz} = 2\int_\gamma \frac{2i}{4i + z - 1/z}\frac{dz}{iz} = 4\int_\gamma \frac{1}{4iz + z^2 - 1}\, dz = 4\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}\, dz,$$

dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 percorsa in verso antiorario. La funzione $f(z) = 1/(z^2 + 4iz - 1)$ è singolare nei punti $z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$ e $z_2 = i(-2 - \sqrt{3})$, che sono poli semplici. Si ha $|z_2| > 2 > 1$, quindi z_2 non è contenuto all'interno di γ. Invece $|z_1| = 2 - \sqrt{3} < 1$ perché $3 > 1$, quindi z_1 è all'interno della regione di piano complesso delimitata da γ. Il residuo di f in z_1 è quindi:

$$\mathrm{Res}(f; z_1) = \lim_{z\to z_1}(z - z_1)f(z) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2i\sqrt{3}}.$$

Si ha allora:

$$4\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}\, dz = 4\cdot 2\pi i \mathrm{Res}(f; z_1) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi,$$

pertanto l'integrale richiesto vale $2\pi(1 - 2\sqrt{3}/3)$.

2 Integrali di funzioni razionali fratte

Esercizio 2.1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2 - 6x + 1}{x^4 + 1}\, dx.$$

Soluzione 2.1. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{3z^2 - 6z + 1}{z^4 + 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $z^4 = -1$, ovvero nei punti $z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$ per $k = 0, 1, 2, 3$. Si tratta di poli semplici, essendo le quattro radici di $z^4 + 1 = 0$. Si ha che:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),\ z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \sqrt{2}/2$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a w. Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_0 e z_1 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-2})$ perché il grado del denominatore è di due unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \to +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.
Pertanto è possibile calcolare l'integrale tramite la formula dei residui:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f; z_0) + \mathrm{Res}(f; z_1)).$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente (si ricordi che $z_i^4 + 1 = 0$ per $i = 0, ..., 3$):

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f; z_i) &= \lim_{z \to z_i} (z - z_i) f(z) = \lim_{z \to z_i} (3z^2 - 6z + 1) \frac{z - z_i}{z^4 + 1} = (3z_i^2 - 6z_i + 1) \lim_{z \to z_i} \frac{z - z_i}{(z^4 + 1) - (z_i^4 + 1)} \\ &= \frac{3z_i^2 - 6z_i + 1}{4z_i^3}\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $3z_i^2 - 6z_i + 1 \neq 0$. Nel caso $i = 0, 1$, osservando che $z_0^2 = i$, $z_1^2 = -i$, $z_0 + z_1 = i\sqrt{2}$, $z_0 - z_1 = \sqrt{2}$ e $z_0 z_1 = -1$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx &= 2\pi i \left(\frac{3z_0^2 - 6z_0 + 1}{4z_0^3} + \frac{3z_1^2 - 6z_1 + 1}{4z_1^3} \right) = 2\pi i \left(\frac{3i - 6z_0 + 1}{4iz_0} + \frac{-3i - 6z_1 + 1}{-4iz_1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3i - 6z_0 + 1}{z_0} + \frac{-3i - 6z_1 + 1}{-z_1} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-3iz_1 + 6z_0 z_1 - z_1 - 3iz_0 - 6z_1 z_0 + z_0}{-z_0 z_1} \right) \\ &= \frac{\pi}{2}(-3iz_1 - z_1 - 3iz_0 + z_0) = \frac{\pi}{2}(-3i(z_0 + z_1) + z_0 - z_1) = \frac{\pi}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 2.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x + 5}{(x^2 + 10x + 26)(x + 5 - 6i)^2}\, dx.$$

Soluzione 2.2. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{z + 5}{(z^2 + 10z + 26)(z + 5 - 6i)^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2 + 10z + 26)(z + 5 - 6i)^2 = 0$, ovvero nei punti $z_1 = -5 + i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = -5 + 6i$. Si ha che z_1 e z_2 sono poli semplici, mentre z_3 è un polo di ordine 2. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, di raggio $R > |z_1| = \sqrt{29}$, percorsa in senso orario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a w. Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 cade all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-3})$ perché il grado del denominatore è di tre unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \to +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R

tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.
Pertanto è possibile calcolare l'integrale tramite la formula dei residui:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = -2\pi i \mathrm{Res}(f; z_2).$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{z_2 + 5}{(z_2 - z_1)(z_2 + 5 - 6i)^2} = \frac{-i}{-2i(-7i)^2} = -1/98.$$

L'integrale richiesto vale pertanto:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \frac{i\pi}{49}.$$

Esercizio 2.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x+3}{(x+3i)(x^2+6x+18)}\, dx.$$

Soluzione 2.3. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{z+3}{(z+3i)(z^2+6z+18)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z+3i)(z^2+6z+18) = 0$, ovvero $z_1 = -3i$, $z_2 = -3+3i$, $z_3 = -3-3i$. Si tratta di poli semplici. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > |z_2| = \sqrt{18}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a w. Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 cade all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-2})$ perché il grado del denominatore è di due unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \to +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.
Calcoliamo i residui di f in z_2. Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{z_2 + 3}{(z_2 + 3i)(z_2 - z_3)} = \frac{3i}{(-3+3i+3i)2 \cdot 3i} = \frac{1}{6(2i-1)} = -\frac{1+2i}{30}.$$

L'integrale richiesto vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x+3}{(x+3i)(x^2+6x+18)}\, dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f; z_2) = \frac{\pi}{15}(2-i)$$

Esercizio 2.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{6}{(x+2i)(x^2+9)(x-4i)}\, dx.$$

Soluzione 2.4. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{6}{(z+2i)(z^2+9)(z-4i)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $(z+2i)(z^2+9)(z-4i) = 0$, ovvero $z_1 = -2i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3_i$, $z_4 = 4i$. Si tratta di poli semplici. Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \max |z_2|, |z_4| = \sqrt{4}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a w. Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_2 e z_4 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-4})$ perché il grado del denominatore è di quattro unità superiore a quello del

numeratore, pertanto al tendere di $R \to +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.
Pertanto è possibile applicare la formula dei residui.
Calcoliamo i residui di f in z_2 e z_4. Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f; z_2) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{6}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{6}{(3i + 2i)(3i + 3i)(3i - 4i)} = \frac{6}{5i \cdot 6i \cdot (-i)} = \frac{1}{5i}. \\
\mathrm{Res}(f; z_4) &= \lim_{z \to z_4} (z - z_4) f(z) = \frac{6}{(z_4 - z_1)(z_4^2 + 9)} = \frac{6}{(4i + 2i)(-16 + 9)} = \frac{6}{6i \cdot (-7)} = -\frac{1}{7i}.
\end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{6}{(x + 2i)(x^2 + 9)(x - 4i)}\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f; z_2) + \mathrm{Res}(f; z_4)) = 4\pi/35.$$

Esercizio 2.5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2}{x^6 + 1}\, dx.$$

Soluzione 2.5. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{3z^2}{z^6+1}$, $z \in \mathbb{C}$. Essa presenta singolarità nei punti corrispondenti a $z^6 + 1 = 0$, ovvero $z_i = e^{i\pi/6 + ik\pi/3}$, $i = 0, ..., 5$. Si tratta di poli semplici (inoltre le radici sono due a due complesse coniugate). Si ha:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_2 = i,\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ z_5 = -i,\ z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Consideriamo il circuito γ_R nel piano complesso costituito dalla semicirconferenza centrata nell'origine e giacente nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, di raggio $R > \max |z_2|, |z_4| = \sqrt{4}$, percorsa in senso antiorario a partire dal punto $v = R$ fino al punto $w = -R$ e dal segmento congiungente w a w. Si osservi che su tale circuito non cadono singolarità di $f(z)$ e inoltre solo z_1, z_2 e z_3 cadono all'interno di esso. Inoltre, si ha che $|f(z)| = O(|z|^{-4})$ perché il grado del denominatore è di quattro unità superiore a quello del numeratore, pertanto al tendere di $R \to +\infty$ si ha che l'integrale sul pezzo curvo di γ_R tende a 0 e l'altro tende all'integrale richiesto.
Pertanto è possibile applicare la formula dei residui.
Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente (si ricordi che $z_i^6 + 1 = 0$ per $i = 0, ..., 3$):

$$\mathrm{Res}(f; z_i) = \lim_{z \to z_i} (z - z_i) f(z) = \lim_{z \to z_i} (3z^2) \frac{z - z_i}{z^6 + 1} = (3z_i^2) \lim_{z \to z_i} \frac{z - z_i}{(z^6 + 1) - (z_i^6 + 1)} = \frac{3z_i^2}{6z_i^5} = \frac{1}{2} \frac{1}{z_i^3}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $3z_i^2 \neq 0$ per $i = 0, ..., 5$. Osservando che $z_0^3 = i$, $z_1^3 = -i$, $z_2^3 = i$, si ha che l'integrale richiesto vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{3x^2}{x^6 + 1}\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f; z_0) + \mathrm{Res}(f; z_1) + \mathrm{Res}(f; z_2)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i}\right) = \pi.$$

3 Applicazioni del Lemma di Jordan

Esercizio 3.1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(4x)}{(x^2 - 2x + 10)(x - 5i)}\, dx.$$

Soluzione 3.1. Consideriamo le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{4iz}}{(z^2 - 2z + 10)(z - 5i)} = e^{4iz} f(z), \qquad g^-(z) = \frac{e^{-4iz}}{(z^2 - 2z + 10)(z - 5i)} = e^{-4iz} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2-2z+10)(z-5i)=0$, ovvero $z_1=1+3i$, $z_2=1-3i$, $z_3=5i$. Si tratta di poli semplici. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z)=e^{i\alpha z}f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ cadono solo le singolarità z_1 e z_3. Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z)=e^{i\alpha z}f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\mathrm{Im}(z)\leq 0$ cade solo la singolarità z_2. Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f, è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(4x)}{(x^2-2x+10)(x-5i)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i(x^2-2x+10)(x-5i)}\,dx\\ &= \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{4ix}}{(x^2-2x+10)(x-5i)}\,dx-\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-4ix}}{(x^2-2x+10)(x-5i)}\,dx\\ &= \pi(\mathrm{Res}(g^+;z_1)+\mathrm{Res}(g^+;z_3)+\mathrm{Res}(g^-;z_2))\end{aligned}$$

Calcoliamo i residui di g^+ e g^- Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(g^+;z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g^+(z)=\frac{e^{4iz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=\frac{e^{4iz_1}}{6i(1-2i)}=\frac{1}{6}\frac{e^{4i-12}}{2+i}=\frac{e^{-12}}{30}e^{4i}(2-i).\\ \mathrm{Res}(g^+;z_3) &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)g^+(z)=\frac{e^{4iz_3}}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}=\frac{e^{-20}}{z_3^2-2z_3+10}=-\frac{e^{-20}}{5(3+2i)}=-\frac{e^{-20}}{65}(3-2i).\\ \mathrm{Res}(g^-;z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)g^-(z)=\frac{e^{-4iz_2}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}=\frac{e^{-4iz_2}}{-6i(1-8i)}=-\frac{1}{6}\frac{e^{-4i-12}}{8+i}=-\frac{e^{-12}}{390}e^{-4i}(8-i).\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale vale:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(4x)}{(x^2-2x+10)(x-5i)}\,dx=\frac{e^{-12}\pi}{390}\left(e^{4i}(26-13i)-e^{-8}(18-12i)-e^{-4i}(8-i)\right).$$

Esercizio 3.2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{3ix}}{(x^2+9)(x-6i)}\,dx.$$

Soluzione 3.2. Consideriamo la funzione:

$$g(z)=e^{3iz}f(z)=\frac{e^{3iz}}{(z^2+9)(z-6i)},\qquad z\in\mathbb{C}.$$

Si ha che il coefficiente α per cui $g(z)=e^{i\alpha z}f(z)$ è positivo. La funzione $f(z)$ è singolare nei punti corrispondenti a $(z^2+9)(z-6i)=0$ ovvero $z_1=3i$, $z_2=-3i$, $z_3=6i$. Di queste singolarità, solo z_1 e z_3 cadono nel semipiano $\mathrm{Im}(z)\geq 0$. Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f, è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{3ix}}{(x^2+9)(x-6i)}\,dx=2\pi i(\mathrm{Res}(g;z_1)+\mathrm{Res}(g;z_2))$$

Calcoliamo i residui di g in z_1 e in z_3. Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(g;z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g(z)=\frac{e^{3iz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=\frac{e^{-9}}{18}.\\ \mathrm{Res}(g;z_2) &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)g(z)=\frac{e^{3iz_2}}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}=\frac{e^{3iz_3}}{z_3^2+9}=-\frac{e^{-18}}{27}.\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{2\pi ie^{-9}}{9}\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-9}}{3}\right).$$

Esercizio 3.3. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 4x}{x^2+6x+14}\,dx.$$

Soluzione 3.3. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\sin 4x = (e^{4ix} - e^{-4ix})/(2i)$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{4iz}}{z^2+6z+14} = e^{4iz} f(z), \qquad g^-(z) = \frac{e^{-4iz}}{z^2+6z+14} = e^{-4iz} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $z^2+6z+14=0$, ovvero $z_1 = -3+i\sqrt{5}$, $z_2 = -3-i\sqrt{5}$. Si tratta di poli semplici. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ cadono solo la singolarità z_1. Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ cade solo la singolarità z_2. Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f, è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 4x}{(x^2+6x+14)}\,dx &= \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{(x^2+6x+14)}\,dx \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{4ix}}{(x^2+6x+14)}\,dx - \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-4ix}}{(x^2+6x+14)}\,dx \\
&= \pi(\operatorname{Res}(g^+; z_1) + \operatorname{Res}(g^-; z_2))
\end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g^+(z) = \frac{e^{4iz_1}}{(z_1-z_2)} = \frac{e^{4iz_1}}{2i\sqrt{5}}. \\
\operatorname{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)g^-(z) = \frac{e^{-4iz_2}}{(z_2-z_1)} = -\frac{e^{-4iz_2}}{2i\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{\sqrt{5}}\,\frac{e^{-12i-4\sqrt{5}} - e^{12i-4\sqrt{5}}}{2i} = \frac{\sqrt{5}\pi e^{-4\sqrt{5}}}{5}\,\frac{e^{-i12}-e^{i12}}{2i} = -\frac{\sqrt{5}\pi e^{-4\sqrt{5}}\sin 12}{5}$$

Esercizio 3.4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x^2-6x+25}\,dx.$$

Soluzione 3.4. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\cos 2x = (e^{2ix} + e^{-2ix})/2$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2-6z+25} = e^{2iz} f(z), \qquad g^-(z) = \frac{e^{-2iz}}{z^2-6z+25} = e^{-2iz} f(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $z^2-6z+25=0$, ovvero $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 3-4i$. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ cade solo la singolarità z_1. Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ cade solo la singolarità z_2. Poiché il grado del denominatore di f è di due unità superiore al grado del numeratore di f, è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{(x^2-6x+25)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{x^2-6x+25}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x^2-6x+25}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2ix}}{x^2-6x+25}\,dx \\
&= i\pi(\operatorname{Res}(g^+; z_1) - \operatorname{Res}(g^-; z_2))
\end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g^+(z) = \frac{e^{2iz_1}}{(z_1-z_2)} = \frac{e^{2iz_1}}{8i}.\\
\mathrm{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)g^-(z) = \frac{e^{-2iz_2}}{(z_2-z_1)} = -\frac{e^{-2iz_2}}{8i}.
\end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale pertanto:

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{e^{6i-8}+e^{-6i-8}}{2} = \frac{\pi e^{-8}\cos 6}{4}$$

Esercizio 3.5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 3x}{(x^2-2x+2)(x^2+9)}\,dx.$$

Soluzione 3.5. Ricordando le formule di Eulero si ha che $\cos 3x = (e^{3ix}+e^{-3ix})/2$. Consideriamo quindi le funzioni:

$$g^+(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2-2z+2)(z^2+9)} = e^{3iz}f(z), \qquad g^-(z) = \frac{e^{-3iz}}{(z^2-2z+2)(z^2+9)} = e^{-3iz}f(z), \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Esse presentano singolarità nei punti corrispondenti a $(z^2-2z+2)(z^2+9)$, ovvero $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$. Si ha che il coefficiente α per cui $g^+(z) = e^{i\alpha z}f(z)$ è positivo, e nel semipiano $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ cadono solo le singolarità z_1 e z_3. Si ha che il coefficiente α per cui $g^-(z) = e^{i\alpha z}f(z)$ è negativo, e nel semipiano $\mathrm{Im}(z)\leq 0$ cadono solo la singolarità z_2 e z_4. Poiché il grado del denominatore di f è di quattro unità superiore al grado del numeratore di f, è possibile applicare il lemma di Jordan, ottenendo che l'integrale richiesto è:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 3x}{(x^2-2x+2)(x^2+9)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{(x^2-2x+2)(x^2+9)}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{3ix}}{(x^2-2x+2)(x^2+9)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-3ix}}{(x^2-2x+2)(x^2+9)}\,dx\\
&= \pi i(\mathrm{Res}(g^+;z_1)+\mathrm{Res}(g^+;z_3)-\mathrm{Res}(g^-;z_2)-\mathrm{Res}(g^-;z_4))
\end{aligned}$$

Trattandosi di poli semplici, il calcolo del residuo può essere svolto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g^+; z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g^+(z) = \frac{e^{3iz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{e^{3iz_1}}{2i(z_1^2+9)}.\\
\mathrm{Res}(g^+; z_3) &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)g^+(z) = \frac{e^{3iz_3}}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} = \frac{e^{3iz_3}}{(z_3^2-2z_3+2)6i}.\\
\mathrm{Res}(g^-; z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)g^-(z) = \frac{e^{-3iz_2}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = -\frac{e^{-3iz_2}}{2i(z_2^2+9)}.\\
\mathrm{Res}(g^-; z_4) &= \lim_{z\to z_4}(z-z_4)g^-(z) = \frac{e^{-3iz_4}}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} = -\frac{e^{-3iz_4}}{(z_4^2-2z_4+2)6i}.
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{6}\left(\frac{3e^{3iz_1}}{z_1^2+9}+\frac{e^{3iz_3}}{z_3^2-2z_3+2}+\frac{3e^{-3iz_2}}{z_2^2+9}+\frac{e^{-3iz_4}}{z_4^2-2z_4+2}\right)$$

Per semplificare quest'espressione, osserviamo che $z_1^2 = 2i$, $z_2^2 = -2i$, $z_3^2 = z_4^2 = -9$ quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{3iz_1}}{z_1^2+9}+\frac{e^{-3iz_2}}{z_2^2+9} &= \frac{e^{3i-3}(9-2i)+e^{-3i-3}(9+2i)}{(9+2i)(9-2i)} = e^{-3}\frac{e^{3i}(9-2i)+e^{-3i}(9+2i)}{85}\\
&= e^{-3}\frac{9e^{3i}-2ie^{3i}+9e^{-3i}+2ie^{-3i}}{85} = e^{-3}\frac{18\frac{e^{3i}+e^{-3i}}{2}-4i\frac{e^{3i}-e^{-3i}}{2}}{85}\\
&= \frac{2e^{-3}}{85}(9\cos 3+2\sin 3)\\
\frac{e^{3iz_3}}{z_3^2-2z_3+2}+\frac{e^{-3iz_4}}{z_4^2-2z_4+2} &= \frac{e^{3iz_3}}{-7-6i}+\frac{e^{-3iz_4}}{-7+6i} = \frac{e^{-9}(-7+6i)+e^{-9}(-7-6i)}{(-7+6i)(-7-6i)} = -\frac{14e^{-9}}{85}
\end{aligned}$$

Allora l'integrale richiesto vale:

$$\frac{\pi}{6}\left(3\frac{2e^{-3}}{85}(9\cos 3+2\sin 3)-\frac{14e^{-9}}{85}\right)=\frac{\pi e^{-3}}{255}(27\cos 3+6\sin 3-7e^{-6}).$$

4 Sviluppi, residui ecc...

Esercizio 4.1. Si consideri la funzione di variabile complessa:

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3+8}+e^{-1/z}.$$

Determinare le singolarità della f, classificarle e calcolare il relativo residuo (è *molto* utile osservare che la f è la somma di due funzioni). Scrivere quindi lo sviluppo di Laurent della f relativo a $z=0$, precisandone l'insieme di convergenza.

Soluzione 4.1. La funzione f è olomorfa in tutti i punti eccettuati quelli per cui $z^3+8=0$, ovvero $z_k=2e^{i\pi/3+2k\pi/3}$, $k=0,1,2$, e il punto $z_3=0$. Si osservi che per $k=0,1,2$ si ha $z_k=-8/z_k^2$ I punti z_k, $k=1,2,3$ sono poli semplici. Ricordando che $e^{-1/z}$ è olomorfa in un intorno di z_k e $\cos z_k\neq 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;z_k) &= \lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\lim_{z\to z_k}\cos z\frac{(z-z_k)}{z^3+8}+(z-z_k)e^{-1/z}=\cos z_k\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{(z^3+8)+(z_k^3+8)}\\ &= \frac{\cos z_k}{3z_k^2}=\frac{8\cos z_k}{3z_k}=\frac{2\bar{z}_k(e^{iz_k}+e^{-iz_k})}{3}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda z_3 si ha che si tratta di una singolarità essenziale, infatti $\cos z/(z^3+8)$ è olomorfa in un intorno di 0 e in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ vale:

$$e^{-1/z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1/z)^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{-k},$$

pertanto $\operatorname{Res}(f;z_3)=-1$. Ricordando che:

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!},\\ \frac{1}{z^3+8} &= \frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{z^3}{8}}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}z^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}}z^{3n},\quad \text{se } |z|<2,\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Laurent di f relativo a $z=0$, che converge se $0<|z|<2$, è il seguente:

$$\begin{aligned}f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}}z^{3n}\right)+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n+j=k}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}\frac{(-1)^j}{2^{3(j+1)}}z^{3j}+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{n+j=k}\frac{1}{n!\,2^{3(j+1)}}z^{3j+2i}+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z^{-k}\end{aligned}$$

Esercizio 4.2. Determinare e classificare le singolarità di

$$f(z)=\frac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z+1}.$$

Calcolare il residuo del polo e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z=1$ precisando l'insieme di convergenza.

Soluzione 4.2. La funzione presenta singolarità in $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$. Si ha che z_2 è un polo semplice, in quanto la funzione $f(z)(z - z_2)$ è olomorfa in un intorno di z_2. Pertanto il calcolo del residuo porge:

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \lim_{z \to z_2} f(z)(z - z_2) = \lim_{z \to -1} \exp\left(\frac{1}{z-1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Nel punto $z_1 = 1$ la funzione presenta una singolarità essenziale: si ha infatti, posto $w = (z-1)^{-1}$,

$$\exp w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

da cui

$$(z-1)^m f(z) = \frac{1}{z+1}\left((z-1)^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{m-n}}{n!}\right),$$

che al limite per $z \to 1$ diverge per ogni $m \in \mathbb{N}$. La funzione è olomorfa in $B(1,2) \setminus \{1\}$, ovvero nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ e pertanto in tale insieme la serie di Laurent relativa a $z = 1$ converge.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^k \frac{w^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1} j!}(z-1)^{k-j}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.3. Calcolare il seguente integrale, dove $C_2(0)$ indica la circonferenza centrata in $z = 0$ di raggio $R = 2$ e orientata positivamente

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z} - 1}{3z(z+1)^2}\, dz.$$

Soluzione 4.3. La funzione integranda, che indicheremo con $f(z)$ presenta singolarità in $z_0 = 0$ e $z_1 = -1$. Si noti tuttavia che

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{2}{3(z+1)^2} \frac{e^{2z} - 1}{2z} = \frac{2}{3},$$

pertanto 0 è una singolarità eliminabile, e il prolungamento di f in 0 definito da $f(0) = 2/3$, rende la funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. L'unica singolarità è pertanto il polo doppio $z_1 = -1$, che è interno al cerchio centrato in 0 di raggio 2. Calcoliamo il residuo di f in z_1, trattandosi di un polo doppio si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f; z_1) &= \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}(f(z)(z+1)^2) = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z} - 1}{3z}\right) \\ &= \lim_{z \to -1} \left(\frac{2e^{2z} \cdot 3z - 3(e^{2z} - 1)}{9z^2}\right) = \frac{-6e^{-2} - 3e^{-2} + 3}{9} = \frac{1 - 3e^{-2}}{3}. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale allora:

$$\int_{C_2(0)} \frac{e^{2z} - 1}{3z(z+1)^2}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f; -1) = 2\pi i \frac{1 - 3e^{-2}}{3}.$$

Esercizio 4.4. Determinare e classificare le singolarità della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3 - 125i} + \frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3}.$$

Indicato con Γ il rettangolo di vertici 5, $5 + 5i$, $-5 + 5i$, -5 percorso in senso antiorario, calcolare

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

Soluzione 4.4. La funzione è singolare nei punti $z^3 = 125i$, ovvero $z_k = 5e^{i\pi/6+2ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$ e $z_3 = 125i$. I punti $z_0 = 5e^{i\pi/6}$, $z_1 = 5e^{i\pi 5/6}$ e $z_2 = -5i$ sono poli semplici per la funzione, mentre z_3 è un polo di ordine 3. All'interno del rettangolo Γ cadono solo z_0 e z_1. Calcoliamo il residuo di f in questi punti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f; z_0) &= \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2(z - z_0)}{(z^3 - 125i) - (z_0^3 - 125i)} + (z - z_0)\frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3} = \frac{z_0^2}{3z_0^2} = \frac{1}{3} \\
\mathrm{Res}(f; z_1) &= \lim_{z\to z_1} f(z)(z - z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{z^2(z - z_1)}{(z^3 - 125i) - (z_1^3 - 125i)} + (z - z_1)\frac{z^3 - \sin z}{(z + 125i)^3} = \frac{z_1^2}{3z_1^2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f; z_0) + \mathrm{Res}(f; z_1)) = \frac{\pi i}{3}.$$

Metodi Matematici per l'Ingegneria
(Prof. Ugo Gianazza)

Esercizi di Metodi

Dott. Antonio Marigonda [2]

Pavia, 11 Dicembre 2007

5 Serie di Fourier

Esercizio 5.1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica definita da

$$f(t) := \begin{cases} 4, & t \in [0, \pi[\\ 2, & t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Scrivere lo sviluppo di Fourier in forma esponenziale.
2. Studiare la convergenza della serie alla f.
3. Determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n$.

Soluzione 5.1. 1. Lo sviluppo in serie di Fourier di f in forma esponenziale è dato da $f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, dove si ha per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 4\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 2\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}(4\pi + 2\pi) = 3. \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 4e^{-int}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 2e^{-int}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(4\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi} + 2\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = -\frac{1}{i\pi n}(2(e^{-in\pi} - 1) + (e^{-2\pi in} - e^{-in\pi})) = \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}, \end{aligned}$$

giacché $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$. Pertanto:

$$f = 3 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}\, e^{int}.$$

2. La serie

$$S(t) := 3 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}\, e^{int}.$$

converge alla funzione nel senso dell'energia perché:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\pi}^{0} |f(t)|^2\,dt + \int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt = 16\pi + 4\pi = 20\pi < +\infty.$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale:

[2] Antonio Marigonda, Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia, Ufficio E22,
email: antonio.marigonda@unipv.it

(a) per ogni $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e derivabile in t, e quindi la serie di Fourier calcolata per $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ converge a $f(t)$;

(b) per $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f presenta una discontinuità di prima specie t, e $f'(k\pi^+)$, $f'(k\pi^-$ esistono entrambe finite. Siamo nel III caso del Teorema di convergenza puntuale, quindi:

$$S(k\pi) = \frac{f(k\pi^+) - f(k\pi^-)}{2} = 3.$$

3. La serie numerica richiesta si ottiene valutando $S(t)$ per $t = \pi$, e si ha $S(\pi) = 3$.

Esercizio 5.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica e pari definita da $f(t) = \dfrac{\pi}{2} - t$ per $t \in [0, \pi]$.

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f;
2. Studiarne la convergenza;
3. Valutare la somma della serie in $t = 0$.

Soluzione 5.2. 1. La funzione è pari, quindi $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Si ha per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\sin nt}{n}\,dt\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$f = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos nt.$$

Osservando che $a_n = 0$ se $n = 2k$ è pari e $a_n = 4/(\pi n^2)$ se $n = 2k+1$ è dispari, si ha:

$$f = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2\cos((2k+1)t).$$

2. Si ha che la serie converge alla funzione nel senso dell'energia, perché la funzione è periodica e limitata. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, posto:

$$S(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2}\cos nt,$$

si ha che:

(a) per ogni $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e derivabile, quindi vi è convergenza puntuale $S(t) = f(t)$.

(b) per ogni $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che f è continua e presenta un punto angoloso, quindi anche in questo caso $S(t) = f(t)$.

3. In particolare, $S(0) = f(0) = \pi/2$, concludiamo perciò che $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, da cui si può dedurre che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Esercizio 5.3. Si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica che nell'intervallo $(0, 2\pi]$ vale

$$u(t) := \begin{cases} 2, & t \in (0, \pi/2) \\ 0, & t \in [\pi/2, \pi) \\ 3, & t \in [\pi, 3\pi/2) \\ 0, & 0 \in [3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Dopo averne accuratamente disegnato il grafico, calcolare lo sviluppo di Fourier in forma trigonometrica. Studiare quindi la convergenza della serie alla funzione. Infine calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Soluzione 5.3. La funzione è limitata e periodica, pertanto sviluppabile in serie di Fourier. Si ha per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2\,dt + \int_\pi^{3\pi/2} 3\,dt\right) = \frac{5}{2}. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2\cos(nt)\,dt + \int_\pi^{3\pi/2} 3\cos(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + 3\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_\pi^{3\pi/2}\right) = \frac{1}{n\pi}(2\sin(n\pi/2) + 3\sin(3n\pi/2)) \\
&= \frac{1}{n\pi}(2\sin(n\pi/2) + 3\sin(-n\pi/2 + 2n\pi)) = \frac{1}{n\pi}(2\sin(n\pi/2) + 3\sin(-n\pi/2)) = -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2\sin(nt)\,dt + \int_\pi^{3\pi/2} 3\sin(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(2\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} + 3\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_\pi^{3\pi/2}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(2 - 2\cos(n\pi/2) + 3\cos(n\pi) - 3\cos(3n\pi/2)\right) = \frac{2 + 3(-1)^n - 2\cos(n\pi/2) - 3\cos(2n\pi - n\pi/2)}{n\pi} \\
&= \frac{2 + 3(-1)^n - 5\cos(n\pi/2)}{n\pi}
\end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$u = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos(nt) + \frac{2 + 3(-1)^n - 5\cos(n\pi/2)}{n\pi}\sin(nt).$$

Poiché u è limitata e periodica si ha che la sua serie di Fourier converge a f in energia. Per quanto riguarda la convergenza puntuale, poiché u è continua e derivabile con derivata continua in ogni punto ad eccezione di $t = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la sua serie di Fourier converge puntualmente a $u(t)$ per $t \neq k\pi/2$, e nei punti $t = k\pi/2$ converge alla media dei limiti destro e sinistro di u, ovvero converge a 1 per $t = 4k\pi$ e $t = \pi/2(4k+1)$, e converge a $3/2$ per $t = (2k+1)\pi$ e $t = \pi/2(4k+3)$. La somma della serie richiesta si ottiene valutando la serie di Fourier per $t = 0$, si ha allora

$$1 = \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Esercizio 5.4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, pari, definita da

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{6}{\pi}t + 3, & t \in [0, \pi/2] \\[2ex] \dfrac{12}{\pi}(\pi - t), & t \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Tracciare il grafico della f, scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione, verificare che converge alla funzione nel senso dell'energia. Applicare infine l'uguaglianza di Parseval per calcolare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Soluzione 5.4. Poiché f è pari, si avrà:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt),$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t+3\right)dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{12}{\pi}(\pi-t)\right)dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{6}{\pi}\frac{t^2}{2}+3t\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{12}{\pi}\left(\pi t-\frac{t^2}{2}\right)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}+\frac{12}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)-\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{8}\right)\right) = \frac{15}{2}.\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t+3\right)\cos(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{12}{\pi}(\pi-t)\right)\cos(kt)\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(\frac{6}{\pi}t+3\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{6}{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt + \left[\left(\frac{12}{\pi}(\pi-t)\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{12}{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{6}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{6}{k\pi}\left[-\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{\pi/2} - \frac{6}{k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{12}{k\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{6}{k^2\pi}(\cos(k\pi/2)-1) - \frac{12}{k^2\pi}((-1)^k-\cos(k\pi/2))\right)\\
&= \frac{12}{\pi^2k^2}(3\cos(k\pi/2)-1-2(-1)^k)
\end{aligned}$$

Allora si ha:

$$S(t) = \frac{15}{4} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cos(k\pi/2)-1-2(-1)^k}{k^2}\cos(kt).$$

Posto:

$$S_N(t) = \frac{15}{4} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{3\cos(k\pi/2)-1-2(-1)^k}{k^2}\cos(kt),$$

dato che f è limitata e periodica, si ha che

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt < +\infty,$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt &= 2\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt = 2\left(\int_0^{\pi/2} |f(t)|^2\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |f(t)|^2\,dt\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{6}{\pi}t+3\right)^2 dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{12}{\pi}(\pi-t)\right)^2 dt\right)\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}\int_0^{3} (w+3)^2\,dw + \frac{144}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi} (t-\pi)^2\,dt\right)\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}\left[\frac{(w+3)^3}{3}\right]_0^3 + \frac{144}{\pi^2}\left[\frac{(t-\pi)^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)\\
&= 2\left(\frac{21\pi}{2}+6\pi\right) = 33\pi
\end{aligned}$$

pertanto la serie converge a f nel senso dell'energia, ovvero:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-S_N(t)|^2\,dt = 0.$$

Per l'uguaglianza di Parseval si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

Nel nostro caso si ha:

$$33 = \frac{225}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

Pertanto la somma della serie numerica vale 39/8.

Esercizio 5.5. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \frac{1}{3+2\cos t}.$$

1. Scrivere lo sviluppo di Fourier di f in forma esponenziale.
2. Verificare il Teorema di convergenza puntuale in $t=0$.

Soluzione 5.5. 1. La serie in forma esponenziale è:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

dove al variare di $k\in\mathbb{Z}$ si ha:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{3+2\cos t}\,dt.$$

Poiché l'integrale del coniugato è il coniugato dell'integrale, si ha che $c_n = \overline{c_{-n}}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Pertanto, dato $n\geq 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{3+2\cos t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{3+z+1/z}\frac{dz}{iz}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2+3z+1}\,dz.
\end{aligned}$$

La funzione integranda è singolare nei punti dove $z^2+3z+1=0$, ovvero $z_1=(-3+\sqrt{5})/2$, $z_2=(-3-\sqrt{5})/2$. Verifichiamo la loro posizione rispetto alla circonferenza $C_1(0)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Si ha $|z_1|^2=(3-\sqrt{5})^2/4$. Poiché $3-\sqrt{5}<1$ (infatti $\sqrt{5}>2$), si ha che $(3-\sqrt{5})^2<1$ e quindi $|z_1|<1$, pertanto z_1 è interno a $C_1(0)$. Viceversa, $|z_2|=(3+\sqrt{5})/2>3/2>1$, pertanto z_2 è esterna. Calcoliamo il residuo della funzione integranda in z_1. Trattasi di un polo semplice:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{z^2+3z+1},z_1\right)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{z^n}{z^2+3z+1}=\frac{z_1^n}{z_1-z_2}=\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Pertanto si ha

$$c_n=\overline{c_{-n}}=c_{-n}=\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^n\sqrt{5}},\qquad\qquad c_0=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dunque:

$$S(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^n\sqrt{5}}e^{int}+\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^n\sqrt{5}}e^{-int}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\cos(nt).$$

2. Si ha che $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi la serie di Fourier di f converge ad f puntualmente per ogni $t\in\mathbb{R}$. In particolare, se $t=0$ si ha $f(0)=S(0)$ e quindi:

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n\right)=\frac{1+2\sum_{n=1}^{\infty}z_1^n}{\sqrt{5}}.$$

Si ha che la serie dell'espressione precedente è una ridotta della serie geometrica di ragione z_1, pertanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_1^n=\sum_{n=0}^{\infty}z_1^n-1=\frac{1}{1-z_1}-1=\frac{z_1}{1-z_1},$$

Si ha quindi

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}z_1^n=1+\frac{2z_1}{1-z_1}=\frac{1+z_1}{1-z_1}=\frac{2+2z_1}{2-2z_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sostituendo nell'espressione $S(0)$ il risultato ottenuto si trova proprio $f(0)$.

Esercizio 5.6. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-periodica, pari, definita da $f(t)=3(\pi+t)$ per $t\in[-\pi,0]$. Dopo aver verificato che la f è sviluppabile in serie di Fourier, scriverne lo sviluppo. Utilizzando poi l'uguaglianza di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

Soluzione 5.6. La funzione è periodica e limitata, pertanto ad energia finita e dunque sviluppabile in serie di Fourier. Si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=2\int_{-\pi}^{0}9(\pi+t)^2=18\left[\frac{(\pi+t)^3}{3}\right]_{-\pi}^{0}=6\pi^3.$$

Essendo f pari si avrà

$$S(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kt),$$

con

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}3(\pi+t)\,dt=\frac{6}{\pi}\left[\frac{(\pi+t)^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{3}{\pi}\\
a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t)\cos(kt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}3(\pi+t)\cos(kt)\,dt\\
&=\frac{6}{\pi}\left[(\pi+t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}-\frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt=-\frac{6}{k\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{6}{\pi k^2}(1-(-1)^k)
\end{aligned}$$

Quindi per $k \geq 1$ si ha che $a_k = 0$ se $k = 2n$ è pari e $a_k = -12/(\pi k^2)$ se $k = 2n - 1$ è dispari. Si ha quindi:

$$S(t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t) = \frac{3}{2}\pi + \frac{12}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}.$$

Per l'uguaglianza di Parseval si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

ovvero:

$$3\pi^2 = \frac{9}{4}\pi^2 + \frac{72}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

La somma richiesta vale pertanto $\pi^4/96$.

6 Trasformate di Fourier

Esercizio 6.1. Ricordando che $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$, si calcoli la trasformata di Fourier delle funzioni:

$$f_1(t) = H(-t)te^{3t}, \qquad f_2(t) = H(-t+2)te^{3t}, \qquad f_3(t) = H(-t)te^{3t}\cos t.$$

Soluzione 6.1. Consideriamo la funzione $f(t) = H(-t)e^{3t}$, ovvero $f(t) = e^{3t}$ per $t < 0$ e 0 altrove.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{3t}e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(3-i\omega)t}\, dt = \frac{1}{3-i\omega}.$$

Poiché $f_1(t) = tf(t)$, si ha:

$$\widehat{f_1}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\widehat{f}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{3-i\omega}\right) = i\left(-\frac{-i}{(3-i\omega)^2}\right) = -\frac{1}{(3-i\omega)^2}$$

Per quanto riguarda f_2, si ha $f_2 = t(H(-t+2)e^{3(t-2)}e^6) = te^6 f(t-2)$, da cui:

$$\widehat{f_2}(\omega) = e^6 i\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{3-i\omega}e^{-2i\omega}\right] = e^{-2i\omega}\frac{5i+2\omega}{(3i+\omega)^2}.$$

Per quanto riguarda f_3, si ha $f_3 = t(H(-t)e^{3t}(e^{it} + e^{-it})/2$, da cui $f_3(t) = (f_1(t)e^{it} + f_1(t)e^{-it})/2$, pertanto:

$$\widehat{f_3}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f_1}(\omega-1) + \widehat{f_1}(\omega+1)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(3-i(\omega-1))^2} + \frac{1}{(3-i(\omega+1))^2}\right).$$

Esercizio 6.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pari, definita da

$$f(t) := \begin{cases} t+4, & t \in [-4,-2] \\ 1-t/2, & t \in [-2,0] \\ 1+t/2, & t \in (0,2) \\ 4-t, & t \in [2,4] \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Verificare che f è $\mathcal{F}$-trasformabile.
2. Elencare le principali proprietà che si possono ricavare su $\widehat{f}$ dalla teoria, prima di calcolare $\widehat{f}$.
3. Calcolare esplicitamente $\widehat{f}$.

Soluzione 6.2. 1. f è limitata e nulla fuori dall'intervallo $[-4,4]$, pertanto è immediato verificare che $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$, e questo garantisce che f è $\mathcal{F}$-trasformabile.

2. Alcune proprietà della trasformata sono le seguenti:

   (a) poiché f è pari e reale, allora $\widehat{f}$ è pari e reale.

   (b) per il Lemma di Riemann-Lebesgue, si ha $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ e $\lim_{\omega\to\pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$.

   (c) poiché f è nulla fuori da $[-4,4]$, non solo f ma anche $tf \in L^1$, quindi anche tf è trasformabile e si ha $\widehat{tf} = i\dfrac{d}{d\omega}\widehat{f}$. Pertanto $\frac{d}{d\omega}\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$.

   (d) il ragionamento precedente può essere iterato: per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $t^k f \in L^1$, da cui $\widehat{t^k f} = i^k \dfrac{d^k}{d\omega^k}\widehat{f}$ pertanto $\frac{d^k}{d\omega^k}\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R})$. Quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$

3. Un calcolo diretto a partire dalla definizione risulta molto difficoltoso. Un procedimento alternativo è il seguente: si osserva che

$$f'(t) = \chi_{[-4,-2]}(t) - \frac{1}{2}\chi_{[-2,0]}(t) + \frac{1}{2}\chi_{[0,2]} - \chi_{[2,4]}(t), \qquad t \neq 0, \pm 2, \pm 4.$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\chi_{[-4,-2]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t{+}3), \quad \chi_{[-2,0]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t{+}3), \quad \chi_{[0,2]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t{-}1), \quad \chi_{[2,4]}(t) = \chi_{[-1,1]}(t{-}3).$$

Perciò si ottiene:

$$f'(t) = \chi_{[-1,1]}(t+3) - \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t+1) + \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t-1) - \chi_{[-1,1]}(t-3).$$

Trasformando membro a membro e osservando dalle tabelle che:

$$\widehat{f(t-t_0)} = \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}, \qquad \widehat{\chi_{[-1,1]}(t)} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}, \qquad \widehat{f'} = i\omega\widehat{f},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} i\omega\widehat{f}(\omega) &= 2\frac{\sin\omega}{\omega}\left(e^{3i\omega} - \frac{1}{2}e^{i\omega} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} - e^{-3i\omega}\right) \\ &= 2\frac{\sin\omega}{\omega}\left(2i\frac{e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}}{2i} - i\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right) \\ &= 2i\frac{\sin\omega}{\omega}(2\sin(3\omega) - \sin(\omega). \end{aligned}$$

e quindi:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2}\,\sin\omega(2\sin(3\omega) - \sin\omega).$$

Esercizio 6.3. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{e^{5it}}{t^2 - 4t + 8}.$$

Soluzione 6.3. Posto $g(t) = 1/(t^2 - 4t + 8)$, si ha $f(t) = g(t)e^{5it}$. Per le proprietà della $\mathcal{F}$-trasformata, si ha: $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - 5)$, dove:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 4t + 8}\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

La funzione integranda è singolare per $t^2 - 4t + 8 = 0$, ovvero $t_1 = 2 + 2i$, $t_2 = 2 - 2i$. Per il lemma di Jordan, si ottiene allora:

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \text{Res}\left(\dfrac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}, 2 + 2i\right) & \text{se } \omega < 0 \\ \\ -2\pi i \text{Res}\left(\dfrac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}, 2 - 2i\right) & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}, 2 + 2i\right) = \lim_{t \to t_1} (t - t_1) \frac{e^{i\omega t}}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{e^{-i\omega t_1}}{t_1 - t_2} = \frac{e^{-i(2+2i)\omega}}{4i} = \frac{e^{(-2i+2)\omega}}{4i} =$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{t^2 - 4t + 8}, 2 - 2i\right) = \lim_{t \to t_2} (t - t_2) \frac{e^{i\omega t}}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{e^{-i\omega t_2}}{t_2 - t_1} = \frac{e^{(-2i-2)\omega}}{-4i}$$

Pertanto si ottiene:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2i\omega} e^{-2|\omega|},$$

e il valore in 0 è determinato per continuità (il teorema di Riemann-Lebesgue ci assicura che $\hat{g}$ è continua). Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2i(\omega-5)} e^{-2|\omega-5|}.$$

Esercizio 6.4. Data la fuzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\cos 4t - \cos 2t}{t^2},$$

calcolare $\widehat{f}$ utilizzando opportunamente le tavole.

Soluzione 6.4. Possiamo riscrivere f nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{\cos 4t - 1}{t^2} + \frac{1 - \cos 2t}{t^2} = \frac{1 - \cos 2t}{t^2} - \frac{1 - \cos 4t}{t^2}.$$

Per le formule di bisezione, si ha $1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$ e $1 - \cos 4t = 2\sin^2 2t$, da cui

$$f(t) = 2\left(\frac{\sin^2 t}{t^2} - \frac{\sin^2 2t}{t^2}\right).$$

Dalle tavole si ricava che la trasformata di $\sin^2(at)/t^2$, $a > 0$ è

$$\pi\left(a + \frac{\omega}{2}\right)\chi_{[-2a,0]}(\omega) + \pi\left(a - \frac{\omega}{2}\right)\chi_{[0,2a]}(\omega),$$

sostituendo nell'espressione della trasformata di f si ha il risultato richiesto.

Esercizio 6.5. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = e^{-8|t|}(1 + 4t^2)\sin(2t),$$

calcolare $\widehat{f}$ utilizzando le relazioni fondamentali.

Soluzione 6.5. Si ha:

$$f(t) = e^{8|t|}\sin(2t) + 4t^2(e^{-8|t|}\sin(2t).$$

Dalle tavole si ricava che se $g(t) = e^{-8|t|}$, allora $\hat{g}(\omega) = 16/(64 + \omega^2)$, inoltre

$$h(t) = e^{-8|t|}\sin(2t) = \frac{1}{2i}e^{-8|t|}e^{2it} - \frac{1}{2i}e^{-8|t|}e^{-2it},$$

da cui:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2i}\left(\frac{16}{64 + (\omega - 2)^2} - \frac{16}{64 + (\omega + 2)^2}\right).$$

Infine $\hat{f}(\omega) = \hat{h}(\omega) - 4\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{h}(\omega)$.

Esercizio 6.6. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(t) = \frac{e^{4it}}{(3+it)(4-it)}.$$

1. Verificare che f è $\mathcal{F}$-trasformabile.
2. Calcolare $\widehat{f}$.

Soluzione 6.6. Si ha:

$$|f(t)| = \left| \frac{e^{4it}}{(3+it)(4-it)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(9+t^2)(16+t^2)}}.$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(9+t^2)(16+t^2)}}\, dt.$$

Tale integrale è finito, perché $f \in C^0(\mathbb{R})$ e all'infinito f è asintotica a $1/t^2$, e ciò assicura l'integrabilità. Per quanto riguarda la trasformata, abbiamo $f(t) = g(t)e^{4it}$, con $g(t) = 1/((3+it)(4-it))$. Percò $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - 4)$. Si ha:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{(3+it)(4-it)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}\, dt.$$

la funzione integranda è singolare in $t_1 = 3i$ e $t_2 = -4i$. Calcoliamo il residuo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_1\right) &= \frac{e^{-i\omega t_1}}{t_1 - t_2} = \frac{e^{3\omega}}{7i} \\
\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_2\right) &= \frac{e^{-i\omega t_2}}{t_2 - t_1} = -\frac{e^{-4\omega}}{7i}
\end{aligned}$$

Per il lemma di Jordan, si ha:

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_1\right) = \frac{2\pi}{7} e^{3\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ -2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{(t-3i)(t+4i)}, t_2\right) = \frac{2\pi}{7} e^{-4\omega} & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

Infine:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega - 4) = \begin{cases} \frac{2\pi}{7} e^{3(\omega-4)} & \text{se } \omega < 4 \\ \frac{2\pi}{7} e^{-4(\omega-4)} & \text{se } \omega \geq 4 \end{cases}$$

Si osservi che è necessario prestare particolare attenzione alla traslazione di $\hat{g}$.