

M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 16 marzo 2004		

1. Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{f}$$

con

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} e^{-4x} \\ e^{-4x} \end{bmatrix}.$$

Fino a punti 8

2. Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x^2 u_{xx} + 4xy u_{xy} + (4y^2 - x^2 + 2x - 1) u_{yy} = 0.$$

- Classificare l'equazione;
- verificare che si può assumere la retta $x = \frac{1}{4}$ come linea portante i dati;
- determinare \bar{y} tale che, modificando i dati iniziali nel punto $P(\frac{1}{4}, y)$ con $y > \bar{y}$, non cambia il valore della soluzione nel punto $Q(\frac{1}{2}, 1)$;
- ridurre l'equazione in forma canonica.

Fino a punti 8

3. Risolvere il seguente Problema

$$\begin{cases} u_{tttt} - u_{xxxx} = 0 & t > 0, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = u_{ttt}(x, 0) = 0 & \forall x > 0, \\ u(0, t) = H(t) \cos t & t > 0. \end{cases}$$

Fino a punti 8

4. Lo spazio $H^1(-\pi, \pi) = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f' \in L^2(-\pi, \pi)\}$ è di Hilbert munito del prodotto interno

$$(f, g)_{H^1} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\overline{g'(x)} dx.$$

Sia $Z \subset H^1(-\pi, \pi)$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \cos x, \quad v_3 = \sin x.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = e^x$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Fino a punti 8

Tempo: 3.00 ore	spazio riservato alla commissione	1. <input type="text"/>	2. <input type="text"/>	3. <input type="text"/>	4. <input type="text"/>	totale <input type="text"/>
----------------------------------	--------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------