M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 6 settembre 2004		

1. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ y_2' = -\frac{1}{2}y_1 - y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ y_3' = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3. \end{cases}$$

Fino a punti 8

---

2. Lo spazio $L^2(-2\pi, 2\pi)$ è di Hilbert munito del prodotto interno

$$(f, g)_{L^2(-2\pi, 2pi)} = \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Sia $Z \subset L^2(-2\pi, 2\pi)$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = \cos\frac{x}{2}, \qquad v_3 = \sin\frac{x}{2}.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali e approssimare $f(x) = x^2 + x$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Fino a punti 8

---

3. Si consideri l'equazione

$$(y-1)^2\, u_{xx} - y^2\, u_{yy} = 0.$$

a) Classificarla e determinarne le linee caratteristiche.
b) Verificare che si può assumere la retta $y = 2$ come linea portante i dati.
c) Determinare $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x, 2)$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di u in (e, e).

Fino a punti 8

---

4. Sia Ω il cerchio di centro l'origine e raggio 6. Determinare la soluzione del Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $g = g(\theta) = \sin 2\theta + \cos 5\theta$.

Fino a punti 8

Tempo: 3.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale