M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 29 giugno 2005		

1. Lo spazio $H^1(-1,1) = \{f \in L^2(-1,1) : \ f' \in L^2(-1,1)\}$ è di Hilbert munito del prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.$$

Sia $Z \subset H^1(-1,1)$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = x, \qquad v_3 = x^2.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = \cos x$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

Fino a punti 8

---

2. Dopo aver verificato la condizione di risolubilità, determinare la soluzione u dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$(x+y)\,u_x + (x-y)\,u_y = u$$

passante per la linea Γ definita da $f(s) = s$, $g(s) = 2s$, $h(s) = 3s$ con $s > 0$.

Fino a punti 8

---

3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ con $n \in \mathbf{N}$ definita da

$$f_n(x) = x\,e^{-9n^2x^2}.$$

a) Studiare il limite puntuale della successione;
b) verificare che $\{f_n\} \subset L^1(0,+\infty)$;
b) verificare che $\{f_n\} \subset L^2(0,+\infty)$;
c) studiare la convergenza della successione in $L^1(0,+\infty)$;
d) studiare la convergenza della successione in $L^2(0,+\infty)$.

Fino a punti 8

---

4. Utilizzando il metodo degli sviluppi in serie, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 2x & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Fino a punti 8

Tempo: 3.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale