M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 19 febbraio 2009		

1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{2x - y}{x + 2y}.$$

Calcolare, quindi, l'integrale particolare passante per il punto $P(1,1)$.

Fino a punti 8

---

2. Data l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x\, u_{xx} + y(1 - xy)\, u_{xy} - y^3\, u_{yy} = 0,$$

verificare che si può assumere la retta r di equazione $y = -3$ come linea portante i dati. Come si possono scegliere due costanti a e b , con $b > 0$, in modo che modificando a piacere il valore di $u(x, -3)$ per $a \le x \le b$, la soluzione u non cambi nel punto $P(-1, -1)$?

Fino a punti 8

---

3. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(\mathbf{R})$ e il suo sistema ortonormale completo $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ dove

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n! \sqrt{\pi}}}\, e^{-x^2/2}\, H_n(x), \qquad H_n(x) = (-)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}.$$

Data la funzione

$$f(x) = (7x^2 + 5x - 3)e^{-x^2/2},$$

calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier $f = \sum_n c_n u_n$, $c_n = (f, u_n)$, e mediante la relazione $\|f\|^2 = \sum_n |c_n|^2$, determinare il valore di un opportuno integrale improprio.

Fino a punti 8

---

4. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{1}{4}(2x - y)\, u_x - \frac{y}{2}\, u_y = u - 2y^2 - xy,$$

passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = \frac{1}{4} + s, \quad g(s) = 1, \quad h(s) = \frac{9}{8} + s + 2s^2,$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

Fino a punti 8

Tempo: 2.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale