M O D. M E T.	cognome e nome	firma
appello del 4 settembre 2006		

1. Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $f_n : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = n\,\sin(n\pi x)\chi_{[\frac{2}{n},\frac{3}{n}]}(x).$$

a) Verificare che $\{f_n\} \subseteq L^1(0,\pi)$;
b) verificare che $\{f_n\} \subseteq L^2(0,\pi)$;
c) studiare la convergenza della successione in $L^1(0,\pi)$;
d) studiare la convergenza della successione in $L^2(0,\pi)$.

Fino a punti 8

---

2. Utilizzando il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0,\ x \in]0,\pi[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \dfrac{\pi}{2} - |x - \dfrac{\pi}{2}|, \quad x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

NB: Si consiglia di tracciare un grafico di $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$.

Fino a punti 8

---

3. Verificare che per ogni $x_o \in \mathbf{R}$ esiste unica in un intorno di x_o la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(x_o) = 0. \end{cases}$$

e che tale soluzione è indefinitamente derivabile con continuità in tale intorno.
Discutere se è possibile assegnare a priori l'intervallo in cui la soluzione di tale problema è definita.
Disegnare, poi, un grafico qualitativo della soluzione in un intorno del punto $(x_o, 0)$ al variare di x_o in $\mathbf{R}$.

NB: Per tracciare il grafico qualitativo, serve e basta conoscere i valori delle derivate prime, seconde, $\ldots$ in x_o .

Fino a punti 8

---

4. Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione u del seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in]0,\pi[,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi], \end{cases}$$

Fino a punti 8

Tempo: 3.00 ore	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	