MODELLI E METODI MATEMATICI I
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 23 NOVEMBRE 2006

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = y\ln(y+2)$$

Tracciare un grafico qualitativo delle linee integrali soluzioni dell'equazione, con particolare attenzione alla regolarità e all'insieme di definizione.

2) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y' = \frac{4x+5y}{5x-6y}.$$

3) Calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = \sin(3y)\cos(3y)$$

e determinare, poi, le soluzioni dei Problema di Cauchy $y(0) = \frac{1}{10}$ e $y(0) = \frac{\pi}{3}$.

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 2\,e^{2x}.$$

5) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{b} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ x \end{bmatrix}.$$

6) Si consideri la successione $\{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, definita da

$$f_n(x) = \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(x)\ln(1 + \frac{2}{n} - x).$$

a) Verificare che $\{f_n\} \subset C^0([0,1])$ e che $\{f_n\} \subset L^1(0,1)$;
b) calcolare il limite puntuale della successione;
c) studiare la convergenza della successione in $C^0([0,1])$ dotato della norma dell'estremo superiore e in $L^1(0,1)$ dotato dell'usuale norma integrale.

7) Si consideri la successione $\{f_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, definita da

$$f_n(x) = n^\alpha \chi_{[0,\frac{2}{n}]}(x)\ln(1 + \frac{2}{n} - x), \quad \alpha > 0.$$

Studiare la convergenza della successione in in $L^1(0,1)$ al variare di α nell'intervallo $]0,+\infty[$.

8) Si consideri lo spazio

$$H^1(-\pi,\pi) = \{f \in L^2(-\pi,\pi) \text{ t.c. } f' \in L^2(-\pi,\pi)\},$$

che è di Hilbert con il prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.$$

Verificare che i tre vettori

$$v_1 = 3, \quad v_2 = \sin 2x, \quad v_3 = \cos 5x$$

sono mutualmente ortogonali in $H^1(-\pi,\pi)$.