MODELLI E METODI MATEMATICI I
PRIMA PROVA IN ITINERE DEL 22 NOVEMBRE 2004

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Data l'equazione differenziale

$$y' = y\, e^y$$

disegnare un grafico qualitativo delle linee integrali, precisandone in particolare l'insieme di definizione, la regolarità, gli eventuali punti stazionari, la presenza di asintoti orizzontali.

2) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy}{1 - x^2y^2}$$

disegnare un grafico qualitativo delle linee integrali, precisandone in particolare l'insieme di definizione, la regolarità, gli eventuali punti stazionari, i punti di flesso.

3) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - 4y}{4} \cos x,$$

determinare le due linee integrali passanti rispettivamente per i punti $A(0, 4)$ e $B(0, 2)$.

4) Si considerino i due vettori

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} x-1 \\ 3x \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2(x-2) \end{bmatrix}.$$

a) Verificare che i due vettori sono linearmente indipendenti.
b) Scrivere la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo 2×2 che ammette $\underline{z}_1$ e $\underline{z}_2$ come integrali particolari.
c) Scrivere l'integrale generale del sistema lineare omogeneo.
d) Verificare il Teorema di Liouville utilizzando $x_0 = 0$.

5) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbf{A}\underline{z} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{b} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} x^4 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

7) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}.$$

8) Utilizzando il Teorema della convergenza dominata, calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{2x} \ln\left(1+\frac{3x}{n}\right) \frac{1}{9+x^2}\, dx.$$

9) Si consideri la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{4n^2 - x^2}{n^4} \chi_{[-2n,2n]}(x), \qquad n \geq 1.$$

a) Studiare la convergenza della successione in $C^0(\mathbf{R})$ dotato della norma dell'estremo superiore.
b) Studiare la convergenza della successione in $L^1(\mathbf{R})$ dotato dell'usuale norma integrale.

10) Si consideri lo spazio

$$H^1(-1,1) = \{f \in L^2(-1,1) \text{ t.c. } f' \in L^2(-1,1)\},$$

che è di Hilbert con il prodotto interno

$$(f,g)_{H^1} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\, dx.$$

Verificare che i tre vettori

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{3}{8}}\, x \quad v_2 = \sqrt{\frac{5}{128}}\,(3x^2-1)$$

costituiscono un sistema ortonormale in $H^1(-1,1)$.