MODELLI E METODI MATEMATICI I

PRIMA PROVA IN ITINERE del 18 novembre 2003

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Dopo aver verificato che le funzioni $z_1 = e^x$ e $z_2 = x$ sono linearmente indipendenti, determinare l'espressione dell'equazione differenziale lineare omogenea che li ammette come integrali particolari ed indicare un intervallo in cui vale il Teorema di esistenza ed unicità in grande. Era possibile individuarlo a priori, senza calcolare esplicitamente i coefficienti $a_i(x)$ dell'equazione?

2) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4) Determinare la linea integrale soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = 2e^x \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

5) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa

$$y'' + 4y = 2\tan x.$$

6) Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2(0, +\infty)$ e sia $Z \subset H$ la varietà lineare generata dai vettori

$$v_1 = e^{-x/2}, \qquad v_2 = x\, e^{-x/2}, \qquad v_3 = x^2\, e^{-x/2}, \qquad v_4 = (x^2 - x)\, e^{-x/2}.$$

Costruire in Z una base di vettori ortonormali ed approssimare $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$ mediante elementi di Z con errore quadratico medio minimo.

7) Dato lo spazio di Hilbert $H = L^2(-1, 1)$, sia

$$F = \{f \in H : \; f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [-1, 0]\}.$$

Determinare $F^\perp$ e data $f(x) = 1 - x^2$, calcolare la proiezione di f su $F^\perp$.

8) Verificare che in $L^2(0, 1)$ la successione $\{\phi_m\}$ definita da

$$\phi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}, \qquad \text{dove } [t] \text{ è la parte intera di } t,$$

costituisce un sistema ortonormale.

9) [**Difficile**] Posto $x = \cos\theta$ verificare che le funzioni

$$\phi_m(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \qquad \text{dove } \; U_m(x) = \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}, \; m \geq 1,$$

costituiscono un sistema ortogonale in $L^2(-1, 1)$. Calcolare poi esplicitamente ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e determinare la relativa costante di normalizzazione.