MODELLI E METODI MATEMATICI I
SECONDA PROVA IN ITINERE DEL 6 FEBBRAIO 2009

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Determinare la funzione $u = u(x, y)$ soluzione dell'equazione del I ordine

$$xu_x + \frac{x}{2y}u_y = \frac{xu^2}{2y},$$

passante per la linea di equazioni parametriche

$$f(s) = s^2, \qquad g(s) = \sqrt{5}\, s, \qquad h(s) = 1,$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

2) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in]0,1[,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(x^2-1), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

3) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in]0,2[,\ y \in]0,2[, \\ u(0,y) = u_x(2,y) = 0, & y \in [0,2], \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,2], \\ u(x,2) = (x-2)^2, & x \in [0,2]. \end{cases}$$

4) Nel dominio

$$D_1 = \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq t \leq x\} \cup \{(x,t) \in \mathbf{R}^2 :\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1-x\}$$

determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in]0,1[,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1,\ \ u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2, & x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Facoltativo: Determinare la soluzione in tutto $D_2 = [0,1] \times [0,1]$.

5) Calcolare

$$\max_{a,\ b,\ c\in\mathbf{R}}\left[25-\int_{-1}^{1}\Big|\ln|x|-(a+bx+cx^2)\Big|^2\,dx\right].$$

6) Si consideri l'equazione del II ordine

$$2x^2\,u_{xx}+2\sqrt{2}\,x\,u_{xy}-\frac{|x|}{x}\,u_{yy}=0.$$

Classificare l'equazione, determinarne le linee caratteristiche e verificare che per $x>0$ si può assumere la linea $y=\frac{1}{2}$ come linea portante i dati. Determinare, inoltre, $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x,\frac{1}{2})$ con $x>\bar{x}$, non cambi $u(1,1)$.