MODELLI E METODI MATEMATICI I

SECONDA PROVA IN ITINERE del 5 febbraio 2004

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Data l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x^2\, u_x - y^2\, u_y = y^2 - x^2,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x, y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = s, \qquad h(s) = s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

2) Data l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$x\, u_x - y\, u_y = u,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x, y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = s, \qquad h(s) = s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

3) Sia $\Omega = [0, \pi] \times [0, 1]$. Posto $\Gamma_0 = [0, \pi] \times \{0\}$, $\Gamma_1 = \{0\} \times [0, 1]$, $\Gamma_2 = \{\pi\} \times [0, 1]$, $\Gamma_3 = [0, \pi] \times \{1\}$, determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = x & \text{su } \Gamma_3. \end{cases}$$

4) Sia $\Omega = [0, \pi] \times [0, 1]$. Posto $\Gamma_0 = [0, \pi] \times \{0\}$, $\Gamma_1 = \{0\} \times [0, 1]$, $\Gamma_2 = \{\pi\} \times [0, 1]$, $\Gamma_3 = [0, \pi] \times \{1\}$, determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ u = x & \text{su } \Gamma_3. \end{cases}$$

5) Determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad x > 0 \\ u(0,t) = 1 \qquad t > 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0 \qquad t > 0. \end{cases}$$

NOTA: limitarsi a calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata della u.

6) Determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 1 \qquad 0 \le x \le L,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t > 0. \end{cases}$$

NOTA: limitarsi a calcolare la $\mathcal{L}$-trasformata della u.

7) Classificare l'equazione

$$(\sin x)^2 u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$$

e determinarne le eventuali linee caratteristiche passanti per il punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

8) Si consideri l'equazione

$$x^3 y\, u_{xx} - 4xy^3\, u_{yy} = 0,$$

1) Classificarla e determinarne le caratteristiche.
2) Verificare che per $x > 0$ la retta $y = \frac{1}{4}$ può essere assunta come linea portante i dati. Determinare inoltre $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x, \frac{1}{4})$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di $u(1,1)$.
3) Ridurre l'equazione a forma canonica.