MODELLI E METODI MATEMATICI I

SECONDA PROVA IN ITINERE del 2 febbraio 2006

COGNOME e NOME NUMERO di MATRICOLA

1) Al variare di a, b, c in $\mathbf{R}$, determinare il valore minimo dell'integrale

$$\int_{-1}^{1} |e^{-|x|} - (ax^2 + bx + c)|^2 \, dx.$$

2) Data l'equazione differenziale alle derivate parziali del I ordine

$$(2x - 2y)u_x + (3x + 7y)\, u_y = x + u,$$

determinare la superficie integrale di equazione $z = u(x, y)$ passante per la linea L di equazioni parametriche

$$f(s) = s, \qquad g(s) = 2s, \qquad h(s) = 3s$$

dopo aver verificato le condizioni di risolubilità.

3) Sia $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Detta Γ la frontiera di Ω, sia $\Gamma_0 = [0, \pi] \times \{\pi\}$ e $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$. Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_1 \\ u = x(\pi - x) & \text{su } \Gamma_0. \end{cases}$$

4) Con il metodo di separazione delle variabili, determinare la soluzione u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \cos^2 x & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

5) Verificare che si ottiene (più rapidamente!) la medesima soluzione con il metodo della trasformata di Laplace.

6) Applicando la formula di risoluzione generale per l'equazione delle onde nel dominio

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : \ -\pi \le x \le 0, \ 0 \le t \le x + \pi\} \cup$$

$$\cup \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le t \le \pi - x\}$$

determinare la soluzione u del Problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & -\pi < x < \pi,\ t > 0 \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \pi^2 - x^2 & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos \dfrac{x}{2} & x \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

7) Determinare la soluzione u del Problema precedente in tutto $[-\pi, \pi] \times \mathbf{R}_+$ utilizzando il metodo di separazione delle variabili.

8) Determinare la soluzione u del Problema precedente in tutto $[-\pi, \pi] \times \mathbf{R}_+$ utilizzando il metodo della trasformata di Laplace.

9) Applicando il metodo della trasformata di Fourier, determinare la soluzione u del Problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in \mathbf{R},\ y > 0 \\ u(x, 0) = \dfrac{1}{x^2 + 4} & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

10) Si consideri l'equazione

$$u_{xx} + 2y(1 + y)\, u_{xy} + 4y^3\, u_{yy} = 0.$$

1) Classificarla e determinarne le linee caratteristiche.
2) Verificare che la retta $y = 2$ può essere assunta come linea portante i dati. Determinare inoltre $\bar{x}$ tale che, modificando il valore della u in $P(x, 2)$ con $x > \bar{x}$, non cambi il valore di $u(0, 5)$.