Metodi Matematici — Soluzioni

30/06/2026

Parte A

A.1 — Serie in $\mathbb{C}$

Data la serie di potenze in campo complesso $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{n^3+\cos n^2}\left(\frac{z}{3\,\mathrm{Re}z+10i}\right)^n$, poniamo

$$w := \frac{z}{3\,\mathrm{Re}z+10i}$$

ed otteniamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{n^3+\cos n^2} w^n$; con il criterio del rapporto è immediato verificare che la serie converge per $|w| \le \frac{1}{7}$ (quindi anche sul bordo), che ci fornisce

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z}{3\,\mathrm{Re}z+10i}\right| \le \frac{1}{7} \right\},$$

cioè anche

$$7\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{9x^2+100} \quad \Rightarrow \quad 49x^2+49y^2 \le 9x^2+100,$$

da cui concludiamo che

$$E = \left\{ x+iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{10}{7}\right)^2} \le 1 \right\}.$$

Si tratta di un insieme **chiuso**.

A.2 — Integrale tramite il Teorema dei Residui

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+5}{(x^2+16)(x^2-8x+32)}\,dx.$$

Poniamo $f(z) = \dfrac{z+5}{(z^2+16)(z^2-8z+32)}$. Si ha

$$z^2+16 = (z-4i)(z+4i), \qquad z^2-8z+32 = (z-4)^2+16 = (z-4-4i)(z-4+4i),$$

quindi i poli semplici di f sono $z = \pm 4i$ e $z = 4 \pm 4i$. Poiché deg(num) $=1$ e deg(den) $=4$, l'integranda decade come $|z|^{-3}$ e possiamo chiudere il contorno con una semicirconferenza nel semipiano superiore, raccogliendo i poli $z=4i$ e $z=4+4i$.

Residuo in $z = 4i$.

$$\mathrm{Res}(f,4i) = \frac{4i+5}{(8i)\left[(4i)^2-8(4i)+32\right]} = \frac{5+4i}{8i(16-32i)} = \frac{5+4i}{128(2+i)} = \frac{14+3i}{640}.$$

Residuo in $z = 4+4i$.

$$\mathrm{Res}(f, 4+4i) = \left.\frac{(4+4i)+5}{(z^2+16)\,2(z-4)}\right|_{z=4+4i} = \frac{9+4i}{(16+32i)(8i)} = \frac{9+4i}{128(-2+i)} = \frac{-14-17i}{640}.$$

Somma e risultato.

$$\mathrm{Res}(f, 4i) + \mathrm{Res}(f, 4+4i) = \frac{(14+3i)+(-14-17i)}{640} = \frac{-14i}{640} = -\frac{7i}{320}.$$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{7i}{320}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{160}}.$$

A.3 — Serie di Fourier

$$f(t) = \begin{cases} (t+\pi)^2, & -\pi \le t < 0 \\ \pi(\pi - t), & 0 \le t < \pi \end{cases}, \qquad f \text{ periodica di periodo } 2\pi.$$

(a) Calcolo dei coefficienti.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{6}.$$

Per a_n $(n \ge 1)$, spezzando l'integrale e usando la sostituzione $u = t + \pi$ sul primo tratto:

$$\pi a_n = \underbrace{(-1)^n \int_0^{\pi} u^2 \cos(nu)\,du}_{=2\pi/n^2} + \underbrace{\pi^2 \int_0^{\pi} \cos(nt)\,dt - \pi\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt}_{=\pi\frac{1-(-1)^n}{n^2}} = \frac{\pi}{n^2}\big[3 - (-1)^n\big],$$

quindi

$$a_n = \frac{3-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 4/n^2, & n \text{ dispari} \\ 2/n^2, & n \text{ pari.} \end{cases}$$

Analogamente per b_n:

$$\pi b_n = \underbrace{-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2[1-(-1)^n]}{n^3}}_{\text{da } (t+\pi)^2} + \underbrace{\frac{\pi^2}{n}}_{\text{da } \pi(\pi-t)} = \frac{2[1-(-1)^n]}{n^3},$$

quindi

$$b_n = \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^3} = \begin{cases} 4/(\pi n^3), & n \text{ dispari} \\ 0, & n \text{ pari.} \end{cases}$$

Pertanto

$$S(t) = \frac{5\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)t).$$

(b) Convergenza puntuale. f è continua su tutto $\mathbb{R}$: i due rami coincidono sia in $t = 0$ $(\,(\pi)^2 = \pi^2 = \pi(\pi - 0)\,)$ sia agli estremi del periodo, $t \to \pi^-$ e $t \to -\pi^+$ (entrambi i limiti valgono 0). Inoltre f è C^1 a tratti (derivata continua su ciascun ramo aperto, con eventuali angoli ma nessun salto di f). Per il teorema di Dirichlet la serie di Fourier converge a $f(t)$ per *ogni* $t \in \mathbb{R}$ (nessun punto di salto, quindi nessuna media tra limite destro e sinistro è necessaria).

(c) Serie numerica S in $t = 0$. Ponendo $t = 0$ (dove $\sin(0) = 0$):

$$S = \frac{5\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - (-1)^n}{n^2}.$$

Per il punto (b), $S = f(0) = \pi^2$, da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - (-1)^n}{n^2} = \pi^2 - \frac{5\pi^2}{12} = \frac{7\pi^2}{12}.$$

(Verifica indipendente: $3\sum 1/n^2 - \sum(-1)^n/n^2 = 3 \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{7\pi^2}{12}$.)

A.4 — Trasformata di Fourier

$$f(t) = \frac{1}{(7t + 9i)^3}, \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

L'unica singolarità di f (polo di ordine 3) è in $t_0 = -\frac{9i}{7}$, nel semipiano inferiore. Poiché $f(t) = O(|t|^{-3})$, possiamo chiudere il contorno nel semipiano superiore se $\omega < 0$ (dove f è olomorfa: integrale nullo) e nel semipiano inferiore se $\omega > 0$ (raccogliendo il polo, con orientazione oraria).

Per $\omega > 0$, scrivendo $f(t)e^{-i\omega t} = \dfrac{e^{-i\omega t}}{343\,(t - t_0)^3}$:

$$\mathrm{Res}_{t=t_0} \left[f(t) e^{-i\omega t} \right] = \frac{1}{2 \cdot 343} \frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega t} \Big|_{t_0} = \frac{-\omega^2}{686}\, e^{-i\omega t_0} = \frac{-\omega^2}{686}\, e^{-9\omega/7}.$$

Quindi

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i \left(\frac{-\omega^2}{686} e^{-9\omega/7} \right) = \frac{i\pi}{343}\, \omega^2 e^{-9\omega/7}.$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{i\pi}{343}\, \omega^2\, e^{-9\omega/7}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \le 0. \end{cases}}$$

A.5 — Equazione differenziale con la trasformata di Laplace

$$X''(t) - 8X'(t) + 16X(t) = H(t)\, t\, e^{5t}, \qquad X(0) = X'(0) = 0.$$

Trasformando (condizioni iniziali nulle) e usando $\mathcal{L}\{te^{5t}\} = \dfrac{1}{(s-5)^2}$:

$$(s^2 - 8s + 16)\hat{X}(s) = \frac{1}{(s-5)^2} \implies \hat{X}(s) = \frac{1}{(s-4)^2(s-5)^2}.$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$\hat{X}(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{(s-4)^2} - \frac{2}{s-5} + \frac{1}{(s-5)^2}.$$

(I coefficienti $2, 1, -2, 1$ si ottengono come $\frac{d}{ds}(s-5)^{-2}\big|_{s=4} = 2$, residuo doppio in $s = 4$ pari a 1, e analogamente in $s = 5$.)

Antitrasformando ($\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$, $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^2\} = te^{at}$):

$$\boxed{X(t) = H(t)\Big[(2+t)e^{4t} + (t-2)e^{5t}\Big].}$$

Parte B

B.1 — Singolarità essenziale

Sia f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ insieme aperto. Il punto z_0 è una **singolarità essenziale** se $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$; nel corrispondente sviluppo di Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ valido in $B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ con $R > 0$ opportuno, la parte singolare ha infiniti coefficienti non nulli (cioè $a_{-n} \neq 0$ per infiniti $n > 0$); equivalentemente z_0 non è né singolarità eliminabile né polo.

Esempio: $f(z) = e^{1/z}$ in $z_0 = 0$, con sviluppo $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!\, z^n}$, che ha infiniti termini nella parte principale.

B.2 — Proprietà di $\hat{f}$ (Esercizio A.4)

Dalla teoria della trasformata di Fourier e dal risultato esplicito ottenuto:

- $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, quindi $\hat{f}$ è continua e limitata, e per il Teorema di Riemann–Lebesgue $\hat{f}(\omega) \to 0$ per $\omega \to \pm\infty$ (verificato: $\omega^2 e^{-9\omega/7} \to 0$). Inoltre $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
- Il decadimento polinomiale $O(t^{-3})$ di f garantisce $tf(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$; nello specifico $\hat{f}$ è in realtà C^∞ su $\omega > 0$ e $\omega < 0$ separatamente, con un raccordo C^1 in $\omega = 0$.
- Il decadimento polinomiale $O(t^{-3})$ di f garantisce $tf(t)$, $t^2 f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}'$, $\hat{f}'' \in L^2(\mathbb{R})$

B.3 — Ascissa di convergenza $-\infty$

$F_1(t) = \chi_{(0,4]}(t)$**.** Il supporto è limitato, $[0,4]$, quindi

$$\int_0^4 |F_1(t)| e^{-\sigma t}\, dt = \int_0^4 e^{-\sigma t}\, dt < \infty \qquad \forall \sigma \in \mathbb{R},$$

essendo un integrale di una funzione continua su un intervallo compatto. La trasformata $\hat{F}_1(s) = \int_0^4 e^{-st} dt$ è anzi una funzione intera di s. Dunque l'ascissa di convergenza è $\sigma_0 = -\infty$.

$F_2(t) = H(t)\, t^2 e^{-t^4}$**.** Per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$ fissato,

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^4} e^{-\sigma t}\, dt < \infty,$$

poiché per $t \to \infty$ il termine e^{-t^4} (decadimento super-esponenziale) domina qualunque $e^{-\sigma t}$, qualunque sia il valore — anche molto negativo — di σ (basta confrontare gli esponenti: $-t^4 - \sigma t \to -\infty$ per ogni σ fissato). Quindi l'integrale converge per ogni $\sigma \in \mathbb{R}$, e anche in questo caso $\sigma_0 = -\infty$.

In entrambi i casi l'assenza di un vincolo di crescita esponenziale (decadimento rapido o supporto compatto) fa sì che non esista alcun limite inferiore reale per la convergenza: l'ascissa di convergenza è $-\infty$.

B.4 — Proprietà di $h = f * g$

$$f(t) = e^{-2|t|}, \qquad g(t) = \frac{\sin^2(4t)}{t^2}.$$

Proprietà di f e g. f è pari, reale, $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, con $\hat{f}(\omega) = \dfrac{4}{\omega^2+4}$. g è pari, reale, non negativa, limitata (estendibile con continuità in 0, $g(0) = 16$) e decade come t^{-2}: dunque $g \in L^1 \cap L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre g è una funzione *a banda limitata*: la sua trasformata è il classico "triangolo"

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} \pi\,(8 - |\omega|), & |\omega| \le 8 \\ 0, & |\omega| > 8, \end{cases}$$

supportato in $[-8, 8]$ (conseguenza del fatto che $\sin^2(4t)/t^2$ è, a meno di costanti, l'autoconvoluzione di un impulso rettangolare di larghezza 8 nel dominio delle frequenze).

Proprietà di $h = f * g$. Per il Teorema di convoluzione, $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$. Poiché $\hat{g}$ ha supporto compatto in $[-8, 8]$, anche $\hat{h}$ ha supporto compatto in $[-8, 8]$: dunque h è una funzione a **banda limitata**. Da questo seguono:

- h è **pari** e **reale** (convoluzione di funzioni pari e reali);
- h è **continua e limitata** ($f \in L^2$, $g \in L^2$, quindi $f * g \in L^\infty \cap C(\mathbb{R})$);
- $h(t) \to 0$ per $|t| \to \infty$ (Riemann–Lebesgue applicato a $\hat{h}$, che è continua e a supporto compatto, dunque L^1);
- per il Teorema di Paley–Wiener, essendo $\hat{h}$ a supporto compatto, h si estende a una funzione **intera di tipo esponenziale** (in particolare $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, anzi reale-analitica);
- esplicitamente $\hat{h}(\omega) = \dfrac{4\pi(8 - |\omega|)}{\omega^2 + 4}\,\chi_{[-8,8]}(\omega)$.

B.5 — Perché $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) < \infty$

La funzione f dell'Esercizio A.3 è continua su $\mathbb{R}$ e di classe C^1 a tratti: su ciascun ramo aperto la derivata esiste ed è continua,

$$f'(t) = \begin{cases} 2(t+\pi), & -\pi < t < 0 \\ -\pi, & 0 < t < \pi, \end{cases}$$

ed è *limitata* sul periodo, dunque $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

Per un risultato standard sulla derivazione termine a termine delle serie di Fourier (valido quando f è continua, periodica e C^1 a tratti), i coefficienti di Fourier a_n', b_n' di f' sono legati a quelli di f da

$$a_n' = n\,b_n, \qquad b_n' = -n\,a_n.$$

Applicando l'identità di Parseval, dato che $f' \in L^2$) a f':

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n')^2 + (b_n')^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\big(a_n^2 + b_n^2\big) \;\le\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\,dt \;<\; \infty,$$

essendo f' limitata (quindi a quadrato integrabile) sul periodo. Questo giustifica la convergenza della serie $\sum n^2(a_n^2 + b_n^2)$.