

Metodi Matematici — Soluzioni

27/07/2026

Parte A

1. Integrale con metodi di Analisi Complessa.

Poniamo $f(z) = \frac{e^{2iz}}{z(z^2 + 3^2)}$. La singolarità in $z = 0$ è apparente per la funzione reale di partenza (poiché $\sin(2x)/x \rightarrow 2$ per $x \rightarrow 0$), ma nel piano complesso $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 0$, oltre ai poli semplici $z = \pm 3i$.

Si integra su un contorno costituito dal segmento $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ sull'asse reale, da una semicirconferenza γ_ε di raggio ε che aggira $z = 0$ nel semipiano superiore (in senso orario), e dall'arco Γ_R nel semipiano superiore. Per il Lemma di Jordan (essendo $2 > 0$) l'integrale su Γ_R tende a 0 per $R \rightarrow \infty$; l'integrale sulla semicirconferenza γ_ε tende a $-i\pi \operatorname{Res}(f, 0)$.

Residui:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{3^2}, \quad \operatorname{Res}(f, 3i) = \frac{e^{-6}}{3i \cdot 2 \cdot 3i} = -\frac{e^{-6}}{2 \cdot 3^2}.$$

Il contorno chiuso racchiude solo il polo $z = 3i$, quindi

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x(x^2 + 3^2)} dx = i\pi \operatorname{Res}(f, 0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, 3i),$$

da cui

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{x(x^2 + 3^2)} dx = 2\pi i \left(-\frac{e^{-6}}{2 \cdot 3^2} \right) + i\pi \frac{1}{3^2} = \frac{i\pi}{3^2} (1 - e^{-6}).$$

Prendendo la parte immaginaria (la parte reale, associata a $\cos(2x)/(x(x^2 + 3^2))$, è nulla in v.p. per disparità dell'integrando):

$$I = \frac{\pi}{3^2} (1 - e^{-6}).$$

2. Serie di Fourier.

La funzione f è pari (verifica diretta sulle due espressioni), quindi $b_n = 0$ per ogni n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(3 - \frac{3}{\pi} t \right) dt = 3.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(3 - \frac{3}{\pi} t \right) \cos(nt) dt = -\frac{6}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$

Quindi $a_n = 0$ per n pari, e per $n = 2k + 1$:

$$a_{2k+1} = \frac{12}{\pi^2 (2k + 1)^2}.$$

(a)

$$S(t) = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

(b) Identità di Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}^2 \right].$$

Calcolo del membro di sinistra:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = 2 \int_0^{\pi} \left(3 - \frac{3}{\pi} t \right)^2 dt = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot \pi}{3}.$$

Quindi

$$\frac{2 \cdot 3^2 \cdot \pi}{3} = \pi \left[\frac{3^2}{2} + \frac{144}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \right],$$

da cui

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3. Trasformata di Fourier e Teorema di Plancherel.

(a) Usando $\mathcal{F}\left[\frac{1}{4^2 + t^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{4} e^{-4|\omega|}$ e la proprietà di modulazione (con $\cos(3t) = \frac{1}{2}(e^{3it} + e^{-3it})$):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{8} \left(e^{-4|\omega-3|} + e^{-4|\omega+3|} \right).$$

(b) Per Plancherel, $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$, e $|f(t)|^2 = \frac{\cos^2(3t)}{(4^2 + t^2)^2}$ è esattamente l'integrando richiesto. Quindi

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^2}{64} \left(e^{-4|\omega-3|} + e^{-4|\omega+3|} \right)^2 d\omega.$$

Sviluppando il quadrato e calcolando i tre integrali elementari

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-8|\omega \mp 3|} d\omega = \frac{1}{4} \text{ ciascuno, } \int_{\mathbb{R}} e^{-4|\omega-3| - 4|\omega+3|} d\omega = e^{-2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \right),$$

si ottiene

$$I = \frac{\pi}{4 \cdot 4^3} \left[1 + (1 + 2 \cdot 3 \cdot 4) e^{-2 \cdot 3 \cdot 4} \right] = \frac{\pi}{256} (1 + 25 e^{-2 \cdot 3 \cdot 4}).$$

4. Convoluzione.

Poiché $g(t) = k'(t)$ con $k(t) = \frac{1}{5^2 + t^2}$, e la derivazione commuta con la convoluzione,

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{t-3}^{t+3} k'(\tau) d\tau = [k(\tau)]_{t-3}^{t+3}$$

ossia

$$h(t) = \frac{1}{5^2 + (t+3)^2} - \frac{1}{5^2 + (t-3)^2}.$$

In alternativa, si può usare il Teorema della Convoluzione per la Trasformata di Fourier. *Trasformata di f .*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-3}^3 e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-3i\omega} - e^{3i\omega}}{-i\omega} = \frac{2 \sin(3\omega)}{\omega}.$$

Trasformata di g . Posto $k(t) = \frac{1}{5^2 + t^2}$, si ha $g = k'$ e $\hat{k}(\omega) = \frac{\pi}{5} e^{-5|\omega|}$. Per la proprietà di derivazione

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[k'](\omega) = i\omega \hat{k}(\omega) = \frac{i\pi\omega}{5} e^{-5|\omega|}.$$

Prodotto delle trasformate.

$$\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) = \frac{2 \sin(3\omega)}{\omega} \cdot \frac{i\pi\omega}{5} e^{-5|\omega|} = \frac{2\pi i}{5} \sin(3\omega) e^{-5|\omega|}.$$

(La cancellazione di ω è coerente con la regolarità di h , convoluzione di una funzione a supporto compatto con una $k \in C^\infty$.)

Antitrasformazione. Scrivendo $\sin(3\omega) = \frac{e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}}{2i}$,

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\pi}{5} e^{-5|\omega|} (e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}) = \hat{k}(\omega) e^{3i\omega} - \hat{k}(\omega) e^{-3i\omega}.$$

Per la proprietà di traslazione, $\mathcal{F}[k(t+3)](\omega) = e^{3i\omega} \hat{k}(\omega)$ e $\mathcal{F}[k(t-3)](\omega) = e^{-3i\omega} \hat{k}(\omega)$. Per iniettività della trasformata di Fourier:

$$h(t) = k(t+3) - k(t-3) = \frac{1}{5^2 + (t+3)^2} - \frac{1}{5^2 + (t-3)^2},$$

in accordo con il calcolo diretto della convoluzione.

5. Problema di Cauchy con la trasformata di Laplace.

Con $\hat{X}(s) = \mathcal{L}[X](s)$, usando $X(0) = 1$, $X'(0) = 2$ e $\mathcal{L}[H(t)t] = 1/s^2$:

$$(s^2 \hat{X} - s - 2) - 9(s \hat{X} - 1) + 20 \hat{X} = \frac{1}{s^2}.$$

Poiché $s^2 - 9s + 20 = (s-4)(s-5)$:

$$\hat{X}(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 1}{s^2(s-4)(s-5)}.$$

Decomposizione in fratti semplici, $\hat{X}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-4} + \frac{D}{s-5}$, con

$$B = \frac{1}{20}, \quad A = \frac{9}{20^2},$$

$$C = \frac{4^2(2-5)+1}{4^2(4-5)} = \frac{47}{16}, \quad D = \frac{5^2(2-4)+1}{5^2(5-4)} = \frac{49}{25}.$$

Antitrasformando:

$$X(t) = H(t) \left[\frac{9}{20^2} + \frac{t}{20} + \frac{47}{16} e^{4t} - \frac{49}{25} e^{5t} \right].$$

Parte B

1. I formula integrale di Cauchy.

Enunciato. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω . Sia $z_o \in \Omega$ e $R > 0$ tale che $\overline{B_R(z_o)} \subset \Omega$. Allora, per ogni $z \in B_R(z_o)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_o)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

dove $C_R(z_o)$ è la circonferenza di centro z_o e raggio R percorsa in senso antiorario. La formula mostra che i valori di f all'interno di γ sono completamente determinati dai valori di f sul bordo γ .

2. Proprietà di $\hat{f}$ per $f(t) = \frac{\cos(3t)}{4^2 + t^2}$.

Sulla base della teoria della Trasformata di Fourier, si osservano le seguenti proprietà (coerenti con l'espressione esplicita):

- *Realtà e parità.* f è reale e pari (poiché $\cos$ è pari e il denominatore è pari), dunque $\hat{f}$ è reale e pari: $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$. Questo si verifica direttamente sulla formula esplicita.
- *Continuità e limitatezza.* $f \in L^1(\mathbb{R})$ (essendo $|f(t)| \leq 1/(16+t^2)$, integrabile), quindi $\hat{f}$ è continua e limitata su tutto $\mathbb{R}$.
- *Comportamento all'infinito.* Per il Lemma di Riemann–Lebesgue, $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ per $|\omega| \rightarrow \infty$.
- *Regolarità.* $f \in L^2(\mathbb{R})$ (poiché $f(t) = O(1/t^2)$), dunque per Plancherel $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
- *Ulteriore regolarità.*
 - $tf \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi $\hat{f}' \in L^2(\mathbb{R})$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\omega^n \hat{f}(\omega)$ continua, limitata ed infinitesima all'infinito. Da qui, possiamo concludere che $\hat{f}(\omega)$ decade esponenzialmente quando $\omega \rightarrow \pm\infty$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\omega^n \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

3. $\mathcal{L}$ -trasformabilità di F_1 e F_2 .

$$F_1(t) = H(t) \frac{1 - \cos(t^2)}{t^4}, \quad F_2(t) = H(t) \frac{1 - e^{-t^4}}{t^4}.$$

Per la $\mathcal{L}$ -trasformabilità basta mostrare che entrambe sono funzioni *localmente integrabili* (in particolare, continue a tratti) su $[0, +\infty)$ e di *ordine esponenziale*, ossia esistono $M, \alpha > 0$ tali che $|F_i(t)| \leq Me^{\alpha t}$ per t grande: questo garantisce un'ascissa di convergenza finita.

F_1 : vicino a $t = 0^+$, sviluppando $\cos(t^2) = 1 - \frac{t^4}{2} + O(t^8)$, si ha

$$F_1(t) = \frac{1 - \cos(t^2)}{t^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2},$$

quindi la singolarità in $t = 0$ è eliminabile: F_1 si estende con continuità su $[0, +\infty)$. Per $t \rightarrow +\infty$, essendo $|1 - \cos(t^2)| \leq 2$,

$$|F_1(t)| \leq \frac{2}{t^4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

dunque F_1 è *limitata* su $[0, +\infty)$ (in particolare di ordine esponenziale con $\alpha = 0$).

F_2 : vicino a $t = 0^+$, essendo $e^{-t^4} = 1 - t^4 + O(t^8)$,

$$F_2(t) = \frac{1 - e^{-t^4}}{t^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1,$$

singularità eliminabile. Per $t \rightarrow +\infty$, essendo $0 \leq 1 - e^{-t^4} \leq 1$,

$$0 \leq F_2(t) \leq \frac{1}{t^4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

dunque anche F_2 è limitata su $[0, +\infty)$.

In entrambi i casi F_i è continua e **limitata** su $[0, +\infty)$, quindi in particolare localmente integrabile e di ordine esponenziale (con $\alpha = 0$, $M = \sup F_i$). Per la definizione della trasformata di Laplace, F_1 e F_2 sono $\mathcal{L}$ -trasformabili, con ascissa di convergenza $\sigma_i \leq 0$.

4. Proprietà della convoluzione $h = f * g$ dell'Esercizio 4.

Sulla base della teoria generale (proprietà del prodotto di convoluzione), si possono dedurre le seguenti proprietà di h , anche senza conoscerne l'espressione esplicita:

- *Regolarità.* $f \in L^1(\mathbb{R})$ è limitata a supporto compatto, mentre $g = k' \in C^\infty(\mathbb{R})$. La convoluzione di una funzione integrabile a supporto compatto con una funzione C^∞ è ancora C^∞ (si può derivare sotto il segno di integrale indefinitamente): $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, coerentemente con l'espressione esplicita trovata.
- *Decadimento.* Poiché f e g appartengono entrambe a $L^2(\mathbb{R})$, h è limitata ed infinitesima all'infinito.
- *Integrabilità.* Poiché $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (essendo $g(t) = O(1/t^3)$) ed anche $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, concludiamo che $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

5. Teorema della convoluzione (per la F-trasformata).

Enunciato (caso base, L^1). Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

è ben definito per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, e vale

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Estensione (L^1 - L^2). Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ e la relazione $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ continua a valere, con $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ che agisce come moltiplicatore su $\hat{g} \in L^2$.

Caso L^2 - L^2 . Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f * g$ è ben definita puntualmente ovunque, continua e limitata, ma in generale $f * g \notin L^1(\mathbb{R})$ né $L^2(\mathbb{R})$; tuttavia, la formula $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ continua a valere.

In sintesi, il risultato è pienamente valido (in senso classico, puntuale quasi ovunque) nella classe L^1 , e si estende con formulazioni opportune alle combinazioni L^1 - L^2 e L^2 - L^2 .