

Metodi Matematici — Soluzioni

Compito del 25/09/2026

Parte A

Esercizio 1

Decomponiamo in fratti semplici:

$$F^*(z) = \frac{1}{(z-3)(z+4)} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+4} \right).$$

Per $|z| > 4$ (quindi $|z| > 3$ e $|z| > 4$) vale, per $a \in \{3, -4\}$,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-a/z} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} z^{-n}.$$

Dunque

$$F^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7} z^{-n}.$$

Poiché $F^*(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^{-n}$ e $F^*(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$, si ha

$$\boxed{f_0 = 0, \quad f_n = \frac{3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7} \quad (n \geq 1).}$$

(Verifica: $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, coerente con $F^*(z) \sim z^{-2}$ all'infinito.)

Esercizio 2

Con $z = e^{it}$, $dt = \frac{dz}{iz}$, $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, si ha $7 + 2 \cos t = \frac{z^2 + 7z + 1}{z}$, quindi

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^n \cdot z}{z^2 + 7z + 1} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 + 7z + 1} dz.$$

Le radici di $z^2 + 7z + 1$ sono $z_{1,2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$, con $z_1 = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} \approx -0,146$ (interna al cerchio unitario) e $z_2 \approx -6,854$ (esterna). Per $n \geq 0$ l'unica singolarità interna è il polo semplice z_1 (z^n è olomorfa), e

$$\text{Res} \left(\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1 \right) = \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} = \frac{z_1^n}{3\sqrt{5}}.$$

Pertanto

$$\boxed{c_n = \frac{1}{3\sqrt{5}} \left(\frac{3\sqrt{5} - 7}{2} \right)^n \quad (n \geq 0).}$$

(Verifica: $c_0 = \frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{45-4}}.$)

Esercizio 3

Poniamo $a = \frac{3\sqrt{5}-7}{2} \in (-1, 0)$, $|a| \approx 0,146$.

(a) I c_n sono reali, quindi $c_{-n} = \overline{c_n} = c_n$ e $c_n = \frac{a^{|n|}}{3\sqrt{5}}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. La serie di Fourier in forma esponenziale è

$$S(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^{|n|} e^{int} = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(nt) \right)},$$

con $a = \frac{3\sqrt{5}-7}{2}$.

(b) La $f(t) = \frac{1}{7+2\cos t}$ è 2π -periodica, di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ (il denominatore è ≥ 5). In particolare è continua e C^1 a tratti, quindi per il teorema di Dirichlet la serie di Fourier converge puntualmente a $f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(c) Si ha $|c_n e^{int}| \leq \frac{|a|^{|n|}}{3\sqrt{5}}$ e $\sum_n |a|^{|n|} < \infty$ (serie geometrica di ragione $|a| < 1$). Per il criterio di Weierstrass la serie converge totalmente, quindi *uniformemente* su $\mathbb{R}$, e la somma è f (per (b)).

Esercizio 4

$f(t) = \frac{1}{(t-3i)(t+2i)}$ ha poli semplici in $t = 3i$ (semipiano superiore) e $t = -2i$ (inferiore), è $O(t^{-2})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calcoliamo $\hat{f}$ con il teorema dei residui e il lemma di Jordan.

Caso $\omega < 0$: $e^{-i\omega t} = e^{i|\omega|t}$, si chiude nel semipiano superiore:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i \operatorname{Res}(f e^{-i\omega t}, 3i) = 2\pi i \frac{e^{-i\omega(3i)}}{3i+2i} = \frac{2\pi}{5} e^{3\omega}.$$

Caso $\omega > 0$: si chiude nel semipiano inferiore (orientazione negativa):

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i \operatorname{Res}(f e^{-i\omega t}, -2i) = -2\pi i \frac{e^{-i\omega(-2i)}}{-2i-3i} = \frac{2\pi}{5} e^{-2\omega}.$$

Per $\omega = 0$ si ottiene $\frac{2\pi}{5}$ per continuità. Quindi

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi}{5} \begin{cases} e^{3\omega}, & \omega \leq 0, \\ e^{-2\omega}, & \omega \geq 0. \end{cases}}$$

Poiché $|f(t)|^2 = \frac{1}{(t^2+9)(t^2+4)}$, per Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+4)(t^2+9)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{25} \left(\int_{-\infty}^0 e^{6\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-4\omega} d\omega \right) \\ &= \frac{2\pi}{25} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2\pi}{25} \cdot \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+4)(t^2+9)} = \frac{\pi}{30}}.$$

(Verifica diretta: $\frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{t^2+9} \right)$, da cui $\frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{30}$.)

Esercizio 5

Sia $\hat{X}(s) = \mathcal{L}[X](s)$. Usando $X(0) = X'(0) = 0$, $\mathcal{L}[X''] = s^2\hat{X}$, $\mathcal{L}[He^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$ e il teorema di convoluzione,

$$s^2\hat{X} - \frac{4}{s+3}\hat{X} = \frac{1}{s} \implies \hat{X} \frac{s^3 + 3s^2 - 4}{s+3} = \frac{1}{s} \implies \hat{X}(s) = \frac{s+3}{s(s^3 + 3s^2 - 4)}.$$

Poiché $s^3 + 3s^2 - 4 = (s-1)(s+2)^2$, si ha

$$\hat{X}(s) = \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2},$$

con

$$A = \frac{3}{(-1)(4)} = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{4}{1 \cdot 9} = \frac{4}{9}, \quad D = \frac{s+3}{s(s-1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{6},$$

$$C = \frac{d}{ds} \frac{s+3}{s^2-s} \Big|_{s=-2} = \frac{(s^2-s) - (s+3)(2s-1)}{(s^2-s)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{6+5}{36} = \frac{11}{36}.$$

(Verifiche: $A+B+C=0$ e $B-2C+D=0$, come richiesto da $\hat{X}(s) = O(s^{-3})$.) Antitrasformando:

$$X(t) = H(t) \left[-\frac{3}{4} + \frac{4}{9}e^t + \frac{11}{36}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^{-2t} \right].$$

Si verifica che $X(0) = -\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{11}{36} = 0$.

Parte B

Esercizio 1 — Lemma di Jordan

Sia $\Gamma_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ e sia f continua su $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ tale che

$$M(R) := \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

Allora, per ogni $\omega > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\omega z} dz = 0,$$

e più precisamente $\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\omega z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M(R)$.

Esercizio 2 — Proprietà di $\hat{f}$ per $f(t) = \frac{1}{(t-3i)(t+2i)}$

Si ha $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ (a valori complessi, non pari né reale). Dalla teoria:

- Poiché $f \in L^1$: $\hat{f}$ è continua, limitata con $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, e $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ per $|\omega| \rightarrow \infty$ (Riemann-Lebesgue), cioè $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Inoltre $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = \frac{2\pi}{5}$.
- Poiché $f \in L^2$: $\hat{f} \in L^2$ e vale Plancherel, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$ (usata nell'esercizio 4 della Parte A).
- Poiché $\hat{f} \in L^1$ (decadimento esponenziale) e f è continua, vale la formula di inversione puntuale $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ per ogni t .
- $tf(t) \notin L^1$ (si comporta come $1/t$), coerentemente con il fatto che $\hat{f}$ non è derivabile in $\omega = 0$: ha un punto angoloso (derivate laterali $\frac{6\pi}{5}$ e $-\frac{4\pi}{5}$), ed è C^∞ (anzi analitica) altrove.

- $tf(t) \in L^2$ (si comporta come $1/t$), da cui si ricava che $\hat{f}' \in L^2$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(n)} \in L^1$, da cui si ricava che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $\omega^n \hat{f} \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$; in altri termini, $\hat{f}$ ha decadimento esponenziale.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $f^{(n)} \in L^2$, da cui si ricava che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $\omega^n \hat{f} \in L^2$.

Esercizio 3 — $\mathcal{F}$ -trasformabilità

Sia $f(t) = \frac{\sin |t|}{|t|^{1/6}}$ per $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, $f(t) = |t|^{-4}$ per $|t| \geq 1$.

- In $(-1, 1) \setminus \{0\}$: $|f(t)| \leq \frac{|t|}{|t|^{1/6}} = |t|^{5/6} \leq 1$, dunque f è limitata e prolungabile con continuità a 0 (con $f(0) = 0$).
- Per $|t| \geq 1$: $\int_{|t| \geq 1} |t|^{-4} dt = \frac{2}{3} < \infty$.

Quindi $f \in L^1(\mathbb{R})$ (e, essendo anche limitata, $f \in L^2(\mathbb{R})$): f è $\mathcal{F}$ -trasformabile nel senso classico di L^1 , cioè $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$ converge assolutamente per ogni ω , e vale anche in senso L^2 (Plancherel). Conseguenze: $\hat{f}$ è continua, limitata, infinitesima all'infinito; essendo f reale e pari, $\hat{f}$ è reale e pari. Si noti che f è continua tranne che in $t = \pm 1$ (salti: $\sin 1 \neq 1$); poiché $t^2 f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ (per $|t| \geq 1$ si ha $|t|^{-2}$), $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$. Il salto in $t = \pm 1$ implica che $\hat{f}(\omega)$ decade solo come $1/|\omega|$, quindi $\hat{f} \notin L^1$: l'inversione vale in senso di valor principale, con il valor medio nei punti di salto.

Esercizio 4 — Proprietà di $h = f * g$

Sia $f(t) = e^{-2|t|}$, $g(t) = \frac{1}{16+t^4}$. Entrambe sono positive, pari, in $L^1 \cap L^2$, limitate, $f \in C^0$, $g \in C^\infty \cap C^0$. Allora:

- $h \in L^1(\mathbb{R})$ con $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$; anzi, essendo $f, g \geq 0$, vale l'uguaglianza $\|h\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 = 1 \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ (usando $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{16+t^4} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$), quindi $\int_{\mathbb{R}} h = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$.
- $h \in L^2$ e limitata, h è continua e $h(t) \rightarrow 0$ per $|t| \rightarrow \infty$.
- $h > 0$ ovunque e h è pari e reale.
- Poiché $g^{(k)} \in L^1$ e limitata per ogni k , si ha $h^{(k)} = f * g^{(k)}$: $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- $\hat{h} = \hat{f} \hat{g}$ con $\hat{f}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$, $\hat{g}$ reale, pari, e $\hat{h} \in L^1 \cap L^2 \cap C^0$, quindi vale l'inversione $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Inoltre $\hat{g}(\omega) = O(e^{-\sqrt{2}|\omega|})$ (poli di g in $t = 2e^{i\pi/4+ik\pi/2}$, con $|\operatorname{Im} t| = \sqrt{2}$), da cui il decadimento esponenziale di $\hat{h}$.

Esercizio 5 — Teoremi del valore iniziale e finale

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in E$, $\mathcal{L}$ -trasformabile e $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$.

Valore iniziale. Se $f \in C^1([0, \infty))$ con f e f' $\mathcal{L}$ -trasformabili (o più generalmente se esiste finito $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ e f' è $\mathcal{L}$ -trasformabile), allora

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0^+).$$

(Segue da $sF(s) - f(0^+) = \mathcal{L}[f'](s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$.)

Valore finale. Se $f \in C^1([0, \infty))$, f e f' sono $\mathcal{L}$ -trasformabili con ascissa di convergenza ≤ 0 (così che F sia definita per $s > 0$), ed esiste finito $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, allora

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \ell.$$

(Segue da $sF(s) - f(0) = \mathcal{L}[f'](s) \rightarrow \int_0^\infty f'(t) dt = \ell - f(0)$ per $s \rightarrow 0^+$, dove l'integrale improprio converge perché $f(t)$ ha limite finito.)