PARTE A

(1) $$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\, dx$$

Ricordiamo che

$$\cos 3x = \operatorname{Re} e^{3ix}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

Pertanto

$$I = \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{3ix}}{2+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}\, dx$$

Sostituendo $e^{ix} = z$, otteniamo

$$I = \operatorname{Re} \int_{C_1(0)} \frac{z^3}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz}$$

$$= \operatorname{Re} \int_{C_1(0)} \frac{z^3 \cdot 2\cancel{z}}{z^2+4z+1} \frac{dz}{i\cancel{z}}$$

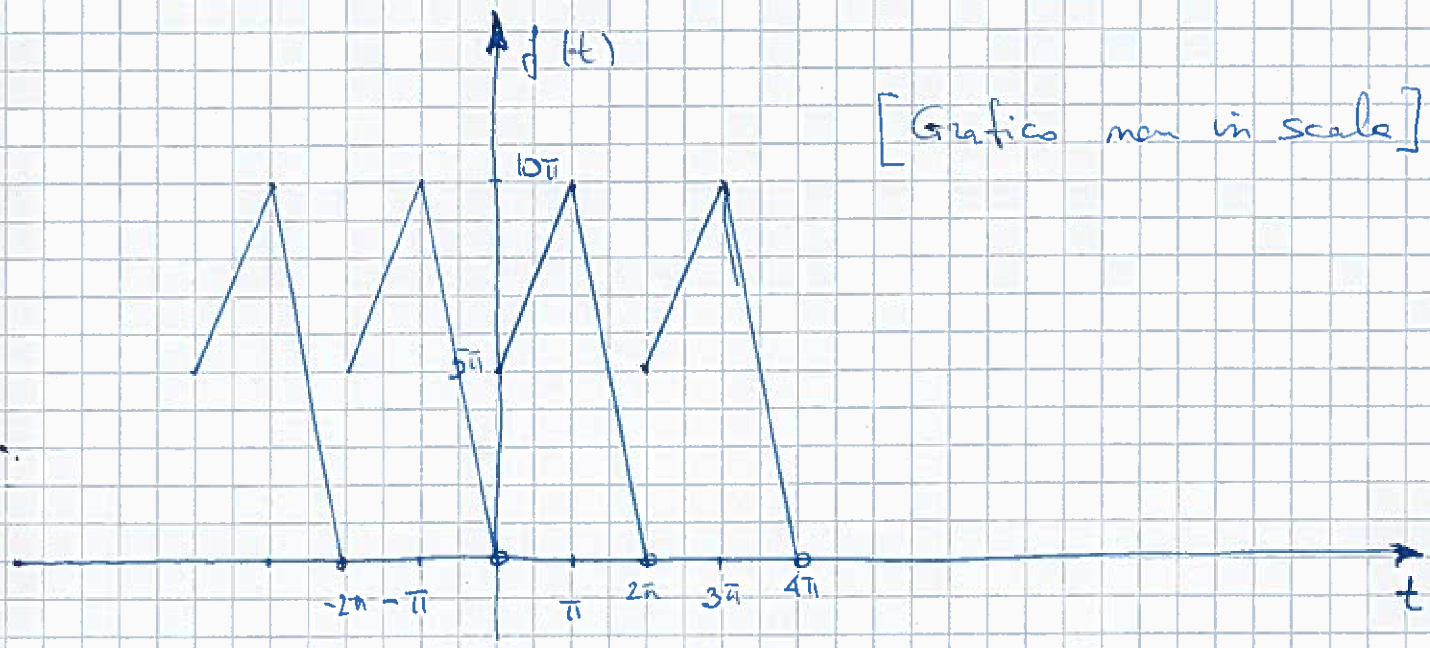
$$= \operatorname{Re}\left[\frac{2}{i} \int_{C_1(0)} \frac{z^3}{z^2+4z+1}\, dz \right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{2}{\cancel{i}}\, 2\pi \cancel{i}\, \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3} \right) \right]$$

$$= 4\pi \frac{(-2+\sqrt{3})^3}{2(-2+\sqrt{3})+4} = 4\pi \frac{(-2+\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (-2+\sqrt{3})^3$$

(2) $f(t) = \begin{cases} -10\,t & t \in (-\pi, 0) \\ 5(\pi + t) & t \in [0, \pi] \end{cases}$

[Grafico non in scala]



Poiché f è ~~generalmente~~ di classe C^0 a tratti e limitata, allora $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ed è pertanto sicuramente sviluppabile in serie di Fourier. Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\pi \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{10}}\pi}{\cancel{2}} + \frac{5\pi + 10\pi}{2}\cdot \pi\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(5\pi^{\cancel{2}} + \frac{15}{2}\pi^{\cancel{2}}\right) = \frac{25\pi}{2} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{25\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -10t\cos nt\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} (5\pi + 5t)\cos nt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{-10t\,\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0}}\right.$$

$$+ 10\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nt}{n}\,dt + \cancel{(5\pi + 5t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi}}$$

$$\left. - 5\int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-10\,\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + 5\,\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{10}{n^2} + \frac{10(-)^n}{n^2} + \frac{5(-)^n}{n^2} - \frac{5}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(15(-)^n - 15\right) = \frac{15}{\pi n^2}\left[(-)^n - 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \, dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -10t \sin nt \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} (5\pi + 5t)\sin nt \, dt \right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{10t \cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0} \right.$$

$$\left. \cancel{-10\int_{-\pi}^{0} \frac{\cos nt}{n} dt} - (5\pi + 5t)\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi} + \cancel{5\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-10(-\pi)\frac{(-)^n}{n} - 10\pi\frac{(-)^n}{n} + 5\pi\frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{10\pi\frac{(-)^n}{n}} - \cancel{10\pi\frac{(-)^n}{n}} + 5\pi\frac{1}{n} \right] = \frac{5}{n}$$

Quindi, in definitiva, lo sviluppo di Fourier cercato è

$$S(t) = \frac{25}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{\pi n^2}\left[(-)^n - 1\right]\cos nt + \frac{5}{n}\sin nt$$

Per quanto riguarda la convergenza, la situazione è la seguente:

a) $\forall t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f è continua e derivabile; pertanto $S(t) = f(t)$.

b) $\forall t_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f ha un salto di ampiezza finita e le pendenze del grafico ai due lati del salto sono finite; pertanto, $S(t_k) = \frac{f(2k\pi^-) + f(2k\pi^+)}{2} = \frac{0 + 5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

c) $\forall t_n = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, f è continua in t_n

e le derivate destra e sinistra sono finite; pertanto,

$$S(t_m) = f(t_m) = 10\pi .$$

---

③ $$f(t) = \log \frac{(t+4i)(t-6i)}{(t-4i)(t+6i)}$$

Abbiamo

$$f(t) = \log[(t+4i)(t-6i)] - \log[(t-4i)(t+6i)]$$

$$= \log(t+4i) + \log(t-6i) - \log(t-4i) - \log(t+6i)$$

da cui

$$f'(t) = \frac{1}{t+4i} + \frac{1}{t-6i} - \frac{1}{t-4i} - \frac{1}{t+6i}$$

$$= \frac{\cancel{t} - 4i - \cancel{t} - 4i}{t^2 + 4^2} + \frac{\cancel{t} + 6i - \cancel{t} + 6i}{t^2 + 6^2}$$

$$= -8i \frac{1}{t^2+4^2} + 12i \frac{1}{t^2+6^2}$$

Passando alle trasformate, abbiamo dalle tabelle

$$\cancel{i}\omega \hat{f} = - \overset{2}{\cancel{8}}\cancel{i} \frac{\pi}{\underset{1}{\cancel{4}}} e^{-4|\omega|} + \overset{2}{\cancel{12}}\cancel{i} \frac{\pi}{\underset{1}{\cancel{6}}} e^{-6|\omega|}$$

cioè anche

$$\hat{f} = 2\pi \frac{e^{-6|\omega|} - e^{-4|\omega|}}{\omega} .$$

---

④ $$f(t) = e^{-2|t|} ; \quad g(t) = \chi_{[-3,3]}(t)$$

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-3,3]}(t-\tau)\, e^{-2|\tau|}\, d\tau$$

$$= \int_{t-3}^{t+3} e^{-2|\tau|}\, d\tau$$

Perciò

$$t+3<0 \implies \boxed{t<-3} \quad h(t) = \int_{t-3}^{t+3} e^{2\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_{t-3}^{t+3} = \frac{1}{2}\left(e^{2(t+3)} - e^{2(t-3)}\right)$$

$$= e^{2t}\, \frac{e^{6} - e^{-6}}{2} = e^{2t} \sinh 6$$

$$\begin{cases} t+3 \geq 0 \\ t-3 \leq 0 \end{cases} \implies \boxed{-3 \leq t \leq 3} \quad h(t) = \int_{t-3}^{0} e^{2\tau}\, d\tau \; +$$

$$+ \int_{0}^{t+3} e^{-2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2\tau}\right]_{t-3}^{0} - \frac{1}{2}\left[e^{-2\tau}\right]_{0}^{t+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{2(t-3)}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-2(t+3)} - 1\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{2(t-3)} - \frac{1}{2} e^{-2(t+3)} + \cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\cosh}$$

$$1$$

$$= -e^{-6} \cosh 2t + 1$$

$$t-3>0 \Rightarrow \boxed{t>3} \quad h(t)=\int_{t-3}^{t+3} e^{-2\tau}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_{t-3}^{t+3} = -\frac{1}{2} e^{-2t-6} + \frac{1}{2} e^{-2t+6}$$

$$= e^{-2t}\sinh 6 .$$

---

(5)
$$\begin{cases} y_{n+2} - 8y_{n+1} + 12y_n = 6^n \\ y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Utilizzando la Z-trasformata, abbiamo

$$z^2\left[F^*(z) - \cancel{y_0} - z^{-1}y_1\right] - 8z\left[F^*(z) - \cancel{y_0}\right]$$
$$+ 12F^*(z) = \frac{z}{z-6}$$

$$(z^2-8z+12)F^*(z) - \frac{1}{2}z = \frac{z}{z-6}$$

$$F^*(z) = \left(\frac{z}{z-6} + \frac{z}{2}\right)\frac{1}{z^2-8z+12}$$

$$= \frac{z}{2}\cdot\frac{z-4}{z-6}\cdot\frac{1}{(z-6)(z-2)}$$

$$= \frac{z}{2}\,\frac{z-4}{(z-2)(z-6)^2} = \frac{z}{2}\left[\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-6} + \frac{C}{(z-6)^2}\right]$$

Abbiamo

$$A = \lim_{z\to 2} \cancel{(z-2)}\frac{z-4}{\cancel{(z-2)}(z-6)^2} = \frac{2-4}{(2-6)^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$C = \lim_{z\to 6} \cancel{(z-6)^2} \frac{z-4}{(z-2)\cancel{(z-6)^2}} = \frac{6-4}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z\to 6} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-6)^2} \frac{z-4}{(z-2)\cancel{(z-6)^2}}\right] = \lim_{z\to 6} \frac{\cancel{z}-2-\cancel{z}+4}{(z-2)^2}$$

$$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Pertanto

$$F^*(z) = \frac{z}{2}\left(-\frac{1}{8}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-6} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-6)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{z}{z-2} + \frac{1}{16}\frac{z}{z-6} + \frac{1}{4}\frac{z}{(z-6)^2}$$

da cui otteniamo, invertendo la trasformata

$$y_n = -\frac{1}{16}2^n + \frac{1}{16}6^n + \frac{1}{24} n\, 6^n.$$

Qui sfruttiamo $\binom{n}{1} = n$

PARTE B

(1) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e $z_0 \in \Omega$

Data $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$, diciamo che z_0 è una singolarità essenziale per f se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \nexists.$$

Preso $\Omega = \mathbb{C}$ e $z_0 = 3$, la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z-3}}$ ha in 3 una singolarità essenziale. Infatti, è immediato osservare che

$$\lim_{z\to 3} e^{\frac{1}{z-3}} \quad \nexists$$

(2) a) $f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}) \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \omega^n \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$
da cui possiamo dedurre che $\hat{f}$ ha andamento esponenziale decrescente per $|\omega| \to \infty$

c) Poiché

$$f'(t) = -8i \frac{1}{t^2+4^2} + 12i \frac{1}{t^2+6^2}$$

possiamo anche riscrivere in altro modo la f, ossia

$$f(t) = -2i \arctan \frac{t}{4} + 2i \arctan \frac{t}{6}$$

$$= 2i \left[\arctan \frac{t}{6} - \arctan \frac{t}{4} \right]$$

Per $t \to +\infty$ (in realtà per ogni $t > 0$)

$$f(t) = 2i \left[\cancel{\frac{\pi}{2}} - \frac{6}{t} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{t} \right] = -\frac{4i}{t}$$

da cui osserviamo che $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, non ci aspettiamo che $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$.

d) f è dispari (ma non necessariamente reale) e quindi la trasformata è essa stessa dispari

(3) Se $f \in L^1$ e $g \in L^2 \in \mathbb{R}$, oppure se f e $g \in L^1$ entrambe, oppure se f e $g \in L^2$ entrambe, abbiamo

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

④ Sia f una funzione di variabile complessa, olomorfa in $\mathrm{Re}\, s > \lambda$ e tale che $\lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} f(s) = 0$.

Se esistono $\mu \geq \lambda$, $\alpha \geq 1$ ed $M > 0$ tale che

$$|f(s)| \leq \frac{M}{|s|^\alpha} \quad \text{in } \mathrm{Re}\, s > \mu,$$

allora f è la $\mathcal{L}$-trasformata di una funzione $F \in \mathcal{E}$ e

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\, \mathrm{vp} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(s)\, e^{st}\, ds$$

dove x è arbitrario, purché $x > \lambda$. Si tratta solo di una condizione sufficiente.

---

⑤ Sia $F^*(z)$ una funzione olomorfa in $|z| > R$ e assumiamo direttamente che sia una Z-trasformata, per semplicità.

Per ricostruire la successione $\{f_n\}_{n \geq 0}$ abbiamo tre possibili formule di inversione

$$\boxed{\mathrm{I}} \quad f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(0)} f(z)\, z^{n-1}\, dz$$

dove $C_r(0)$ è una circonferenza centrata in $z_0 = 0$ e orientata positivamente, con $r > R$.

$$\boxed{\mathrm{II}} \quad f_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} F\left(\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=0}.$$

III

$$f_0 = \lim_{z \to z_\infty} F^*(z)$$

$$f_1 = \lim_{z \to z_\infty} z\left[F^*(z) - f_0 \right]$$

$$f_2 = \lim_{z \to z_\infty} z^2\left[F^*(z) - f_0 - f_1/z \right]$$

$$\vdots$$