PARTE A

① $$I = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t(t^2-9)}\, dt$$

Osserviamo che
$$\sin 2t = \operatorname{Im} e^{2it}$$

Pertanto

$$I = \operatorname{Im}\left[vp \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2it}}{t(t^2-9)}\, dt \right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\pi i \left.\frac{e^{2it}}{2t\cdot t}\right|_{3} + \pi i \left.\frac{e^{2it}}{2t\cdot t}\right|_{-3} + \right.$$

$$\left. + \pi i \left.\frac{e^{2it}}{t^2-9}\right|_{0} \right]$$

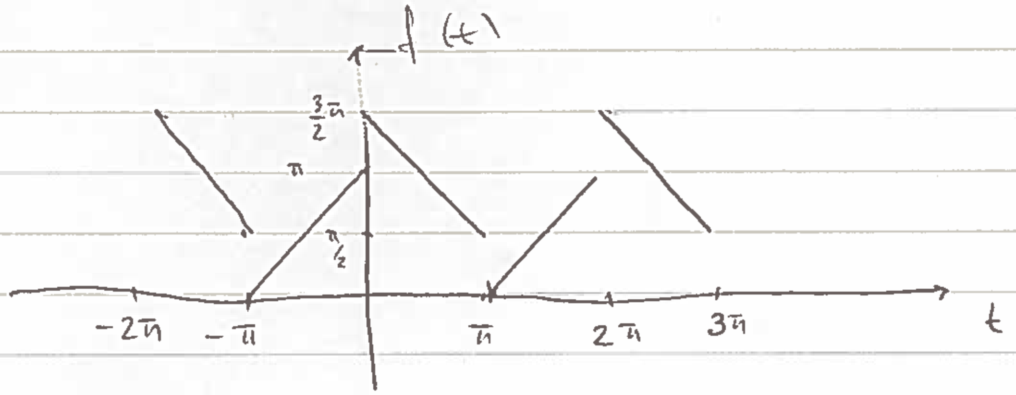
$$= \operatorname{Im}\left[\pi i \frac{e^{6i}}{18} + \pi i \frac{e^{-6i}}{18} - \pi i \frac{1}{9} \right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{\pi i}{9} \left(\frac{e^{6i} + e^{-6i}}{2} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{9} (\cos 6 - 1)$$

---

② $$f(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{se } -\pi < t \le 0 \\ \frac{3}{2}\pi - t & \text{se } 0 < t \le \pi \end{cases}$$



Poiché f è limitata, sicuramente $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ed è pertanto sviluppabile in serie di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\pi\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[\frac{\cancel{\pi}}{2}\left(\pi + 2\pi\right)\right] = \frac{3}{2}\pi \implies \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)\cos nt\,dt + \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi - t\right)\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{(\pi+t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0}} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nt}{n}\,dt + \right.$$

$$\left. + \cancel{\left(\frac{3}{2}\pi - t\right)\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi}} + \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-)^n}{n} - \frac{(-)^n - 1}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)\sin nt + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi - t\right)\sin nt\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(\pi+t)\frac{\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \cancel{\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nt}{n}dt} + \right.$$

$$\left. -\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)\frac{\cos nt}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \cancel{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nt}{n}dt}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{1}{n} - \left(\frac{3}{2}\pi - \pi\right)\frac{(-)^n}{n} + \frac{3}{2}\pi\frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{2n} - \frac{\cancel{\pi}}{2n}(-)^n\right) = \frac{1-(-)^n}{2n}$$

Pertanto, la serie di Fourier è data da

$$S(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1-(-)^n}{n^2}\cos nt + \frac{1-(-)^n}{2n}\sin nt$$

Veniamo, ora, alla convergenza.

$\forall t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f è continua e derivabile in t. Pertanto

$$S(t) = f(t)$$

$\forall t_{2k} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f ha in t_{2k} un salto di ampiezza finita e la pendenza ai due lati del salto è finita. Pertanto

$$S(t_{2k}) = \frac{f(t_{2k}^+) + f(t_{2k}^-)}{2} = \frac{\pi + \frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

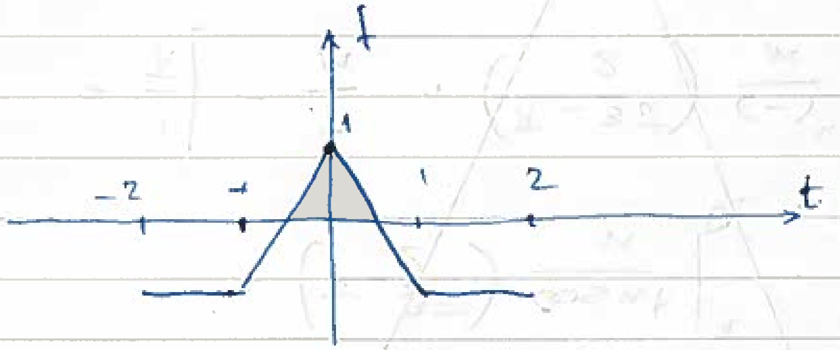
$\forall\, t_{2k+1} = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f ha in t_{2k+1} un salto di ampiezza finita e la pendenza ai due lati del salto è finita. Pertanto

$$S(t_{2k+1}) = \frac{f(t_{2k+1}^+) + f(t_{2k+1}^-)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

---

③ $f(t) = -\chi_{[-2,-1)}(t) + \chi_{[-1,0)}(t)(1+2t) +$

$$+\chi_{[0,1)}(t)(1-2t) - \chi_{[1,2]}(t)$$



$$\hat{f} = -\int_{-2}^{-1} e^{-i\omega t} + \int_{-1}^{0} (1+2t)\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} (1-2t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$-\int_{1}^{2} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\Big|_{1}^{2} +$$

$$+ \frac{1+2t}{-i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{i\omega}\int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}\,dt +$$

$$+ \frac{1-2t}{-i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1} - \frac{2}{i\omega}\int_{0}^{1} e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{e^{i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{2i\omega}}{i\omega} + \frac{e^{-2i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{i\omega}} - \frac{2}{(i\omega)^2} e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega}$$

$$\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega} + \cancel{\frac{1}{i\omega}} + \frac{2}{(i\omega)^2} e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \cancel{2\frac{\sin\omega}{\omega}} - 2\frac{\sin 2\omega}{\omega} + \cancel{\frac{2}{\omega}\sin\omega}$$

$$+ \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} e^{i\omega} - \frac{2}{\omega^2} e^{-i\omega} + \frac{2}{\omega^2}$$

$$= -2\frac{\sin 2\omega}{\omega} + \frac{4}{\omega^2}(1 - \cos\omega)$$

Osserviamo che la funzione si può riscrivere come

$$f(t) = -\chi_{(-2,2)}(t) + 2(1-|t|)_+$$

da cui si ottiene immediatamente

$$\hat{f} = -2\frac{\sin 2\omega}{\omega} + 2\cdot 2\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}$$

$$= -2\frac{\sin 2\omega}{\omega} + 4\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}$$

che è, appunto, l'espressione indicata sopra.

---

4 $h(t) = |t|\chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-1,1]}(t)$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\tau|\chi_{[-1,1]}(\tau)\,\chi_{[-1,1]}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{t-1}^{t+1} |\tau|\chi_{[-1,1]}(\tau)\,d\tau$$

E' immediato ricavare che

$\forall\, t \leq -2 \qquad h(t) = 0$

$\forall\, t \geq 2 \qquad h(t) = 0.$

Inoltre

$\forall \; -2 < t < 0$

$$h(t) = \int_{-1}^{t+1} |\tau| \, d\tau$$

$\forall \; 0 \leq t < 2$ $\qquad h(t) = \int_{t-1}^{1} |\tau| \, d\tau$

Calcoliamo il primo integrale. Se $t+1 \leq 0$
$\Rightarrow -2 < t \leq -1$, abbiamo

$$h(t) = \int_{-1}^{t+1} (-\tau) \, d\tau = -\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-1}^{t+1} = -\frac{1}{2}\left[t^2+2t+\cancel{1}-\cancel{1}\right]$$

$$= -\frac{t^2+2t}{2}$$

Se, invece, $-1 < t < 0$ abbiamo

$$h(t) = \int_{-1}^{t+1} |\tau| \, d\tau = \int_{-1}^{0} (-\tau) \, d\tau + \int_{0}^{t+1} \tau \, d\tau$$

$$= -\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{0}^{t+1} = \frac{1}{2} + \frac{t^2+2t+1}{2}$$

$$= \frac{t^2+2t+2}{2}$$

Passiamo al calcolo del secondo integrale. Se
$t-1 \leq 0 \Rightarrow \quad 0 \leq t \leq 1$, abbiamo

$$h(t) = \int_{t-1}^{\cancel{t+1}\ 1} |\tau|\, d\tau = \int_{t-1}^{0} -\tau\, d\tau + \int_{0}^{1} \tau\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{t-1}^{0} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{t^2-2t+1}{2} = \frac{t^2-2t+2}{2}$$

Se $1 < t < 2$, abbiamo

$$h(t) = \int_{t-1}^{1} \tau\, dt = \frac{1}{2}\left[\cancel{1} - t^2 + 2t - \cancel{1}\right] = \frac{2t - t^2}{2}$$

In definitiva, dunque

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -2 \\ -\frac{t^2+2t}{2} & \text{se } -2 < t \leq -1 \\ \frac{t^2+2t+2}{2} & \text{se } -1 < t < 0 \\ \frac{t^2-2t+2}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t-t^2}{2} & \text{se } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Si può osservare che $\operatorname{supp} h = [-2,2]$ e che $h \in C^0(\mathbb{R})$.

⑤ $\begin{cases} tY'' + 2Y' - 4tY = H(t)t & t>0 \\ Y(0) = Y'(0) = 0 \end{cases}$

Risolviamo applicando la $\mathcal{L}$-trasformata. Abbiamo

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2 y(s) - \cancel{sY(0)} - \cancel{Y'(0)}\right) + 2\left(sy(s) - \cancel{Y(0)}\right)$$

$$+4\frac{d}{ds}y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$-\cancel{2sy(s)} - s^2y' + \cancel{2sy(s)} + 4y'(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$-y'(s^2-4) = \frac{1}{s^2}$$

$$-y' = \frac{1}{s^2(s^2-4)}$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{s^2(s^2-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}$$

dove

$$B = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \frac{1}{\cancel{s^2}(s^2-4)} = -\frac{1}{4}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2-4} = \lim_{s\to 0} -\frac{2s}{(s^2-4)^2} = 0$$

$$C = \lim_{s\to 2} \cancel{(s-2)} \frac{1}{s^2\cancel{(s-2)}(s+2)} = \frac{1}{16}$$

$$D = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \frac{1}{s^2(s-2)\cancel{(s+2)}} = -\frac{1}{16}$$

Quindi

$$-y' = -\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{16}\frac{\cancel{s}+2-\cancel{s}+2}{s^2-4}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2-4}$$

ed anche

$$\mathcal{L}(t\,Y(t), s) = \mathcal{L}\left(-\frac{1}{4} t H(t) + \frac{1}{8} H(t) \sinh 2t\right)$$

da cui

$$Y(t) = \frac{H(t)}{4}\left[\frac{\sinh 2t}{2t} - t\right]$$

PARTE B

① Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto, $z_0 \in \Omega$ e f una funzione olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$. Diciamo che f ha in z_0 un polo se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = z_\infty .$$

Inoltre l'ordine del polo è l'intero $k \in \mathbb{N}$

tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) = \ell \quad \text{finito}, \neq 0.$$

---

(2)

$f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ e $\hat{f}$ è limitata

$f \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f} \in L^2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad t^n f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \forall n \quad \hat{f}^{(n)} \in C_0 \cap L^2(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} f = [-2,2] \Rightarrow \hat{f}$ è analitica intera e

$|\hat{f}(z)| \leq A e^{2|\operatorname{Im} z|}$

f è pari reale $\Rightarrow \hat{f}$ è pari e reale

---

(3) $F_2 \notin E$ perché in $t = 3$ ha una singolarità di ordine 2 non integrabile

$F_1 \notin E$ perché non esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_0^{+\infty} F_1(t) e^{-\lambda t} dt < +\infty.$$

---

(4) Posto

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}, \qquad g(t) = |t| \chi_{[-1,1]}$$

abbiamo

$$f \in L^1 \cap L^2, \qquad g \in L^1 \cap L^2$$

Pertanto

$$h = f * g \quad \in L^1, \ L^2, \ C^0$$

e

$$\lim_{|t| \to \infty} h = 0.$$

Inoltre, poiché $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} g = [-1,1]$, necessariamente

$$\operatorname{supp} h \subseteq [-2,2] = [-1,1] + [-1,1].$$

---

(5) Abbiamo due principali risultati di convergenza puntuale della serie di Fourier

1) Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ t.c. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$.

Fissato $t_0 \in (-\pi, \pi)$, se

a) f è continua e derivabile in t_0,

oppure

b) f è continua in t_0, $\exists f'(t_0^+)$, $\exists f'(t_0^-)$ sono entrambe finite ma diverse

oppure

c) f ha in t_0 un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono en-

trambe finite,
allora la serie di Fourier della f converge in t_0 e risulta

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

2) Nelle stesse ipotesi, se f è limitata in $[-\pi, \pi]$ e l'intervallo è scomponibile in un numero finito di sottointervalli, in ciascuno dei quali f è monotona, allora la serie di Fourier della f converge in ogni $t \in (-\pi, \pi)$ e risulta

$$S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$