PARTE A

① $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t-4}{(t^2+2^2)(t-3i)^2(t+3i)}\,dt$$

La funzione $f(z) = \dfrac{z-4}{(z^2+2^2)(z-3i)^2(z+3i)}$

ha in

$z = \pm 2i$ poli di ordine 1,

$z = 3i$ polo di ordine 2,

$z = -3i$ polo di ordine 1.

Pertanto, considerando le singolarità con parte immaginaria negativa,

$$I = -2\pi i \left[\mathrm{Res}(f(z), -2i) + \mathrm{Res}(f(z), -3i) \right]$$

Abbiamo

$$\mathrm{Res}(f(z), -2i) = \left. \frac{z-4}{2z(z-3i)^2(z+3i)} \right|_{z=-2i} =$$

$$= \frac{-4-2i}{-2\cdot 2i(-5i)^2(-2i+3i)}$$

$$= \frac{-4-2i}{-4i(-25)i} = \frac{4+2i}{25(4)}$$

$$\mathrm{Res}(f(z), -3i) = \left. \frac{z-4}{(z^2+2^2)(z-3i)^2} \right|_{z=-3i} = \frac{-4-3i}{(-5)(-6i)^2}$$

$$= \frac{4+3i}{5\cdot(-36)}$$

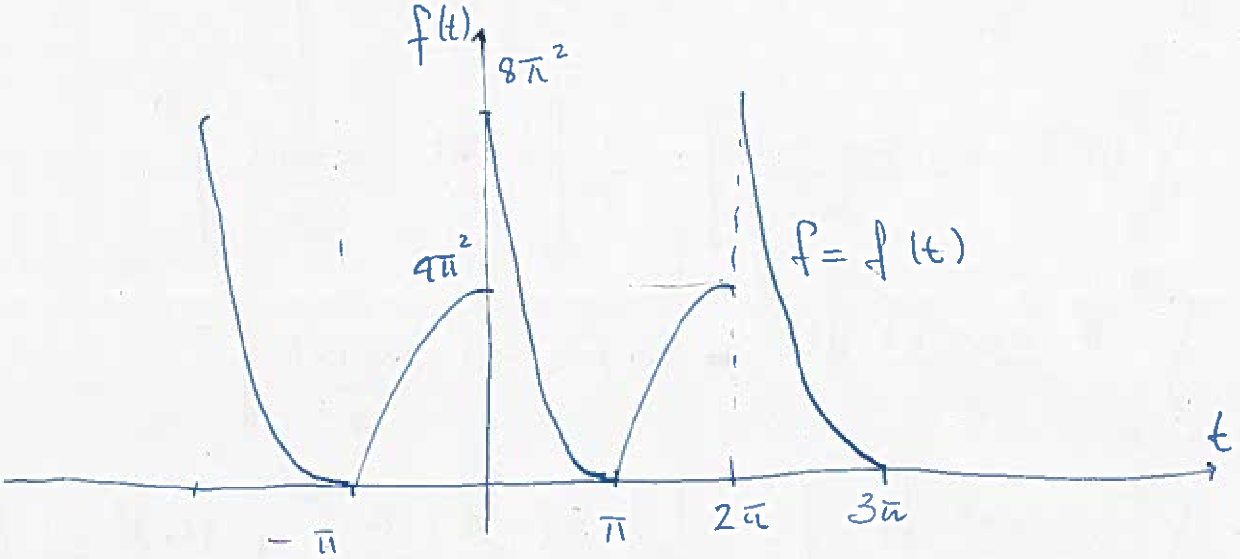
Quindi

$$I = -\cancel{2}\pi i \left(\frac{4+2i}{\cancel{100}\ 50} - \frac{4+3i}{\cancel{180}\ 90} \right)$$

$$= -\pi i \ \frac{36+18i-20-15i}{450} = -\pi i \ \frac{16+3i}{450}$$

---

(2) $$f(t) = \begin{cases} 4(\pi^2 - t^2) & -\pi < t < 0 \\ 8(\pi - t)^2 & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$



La funzione è limitata e quindi sicuramente sviluppabile in serie di Fourier.

Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 4(\pi^2 - t^2)\,dt + \int_{0}^{\pi} 8(\pi - t)^2\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[4\left(\pi^2 t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{8}{3}(\pi - t)^3 \Big|_{0}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-4\left(\pi^2(-\pi) - \frac{1}{3}(-\pi)^3\right) + \frac{8}{3}\pi^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-4\left(-\pi^3+\frac{\pi^3}{3}\right)+\frac{8}{3}\pi^3\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[4\pi^{\cancel{3}\,2}-\frac{4}{3}\pi^{\cancel{3}\,2}+\frac{8}{3}\pi^{\cancel{3}\,2}\right]$$

$$= \left(4+\frac{4}{3}\right)\pi^2 = \frac{16}{3}\pi^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{8}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 4(\pi^2-t^2)\cos nt\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} 8(\pi-t)^2\cos nt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{4(\pi^2-t^2)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0}}\right.$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} 8t\,\frac{\sin nt}{n}\,dt + \cancel{8(\pi-t)^2\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi}}$$

$$\left. + \int_0^{\pi} 16(\pi-t)\,\frac{\sin nt}{n^2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-8t\,\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right.$$

$$+ \cancel{\int_{-\pi}^{0} 8\,\frac{\cos nt}{n^2}\,dt} - 16(\pi-t)\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_0^{\pi} +$$

$$\left. - \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n^2}\,dt}\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[8(-\cancel{\pi})\frac{(-)^n}{n^2} + 16\cancel{\pi}\,\frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{16}{n^2} - \frac{8(-)^n}{n^2} = \frac{16-8(-)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 4(\pi^2-t^2)\sin nt\,dt\right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} 8(\pi-t)^2\sin nt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-4(\pi^2-t^2)\frac{\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{0}\right.$$

$$-8\int_{-\pi}^{0} t\,\frac{\cos nt}{n} - 8(\pi-t)^2\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi} - 2\cdot 8\int_0 (\pi-t)\frac{\cos nt}{n}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-4\frac{\pi^2}{n} \cancel{- 8t \frac{\sin nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}} + 8\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nt}{n^2}\,dt \right.$$

$$\left. + 8\frac{\pi^2}{n} \cancel{- 16(\pi - t)\frac{\sin nt}{n^2}\Big|_0^{\pi}} - 16\int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n^2}\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[4\frac{\pi^2}{n} - 8\frac{\cos nt}{n^3}\Big|_{-\pi}^{0} + 16\frac{\cos nt}{n^3}\Big|_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[4\frac{\pi^2}{n} - 8\frac{1}{n^3} + 8\frac{(-)^n}{n^3} + 16\frac{(-)^n}{n^3} - \frac{16}{n^3} \right]$$

$$= 4\frac{\pi}{n} - \frac{24}{\pi n^3} + \frac{24(-)^n}{\pi n^3}$$

Quindi, la serie di Fourier cercata è

$$S(t) = \frac{8}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 - 8(-)^n}{n^2}\cos nt + \left(4\frac{\pi}{n} - \frac{24}{\pi n^3} + \frac{24(-)^n}{\pi n^3} \right)\sin nt$$

Per quanto riguarda la convergenza, osserviamo che

1) $\forall t \neq k\pi$ $\quad f$ è continua e derivabile in t; pertanto $S(t) = f(t)$ per tali t.

2) $\forall t_k = 2k\pi$ $\quad f$ ha un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono finite; quindi $S(t_k) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$

$$= \frac{8\pi^2 + 4\pi^2}{2} = 6\pi^2.$$ (0 è uno di questi punti)

3) $\forall t_n = (2n+1)\pi$ $\quad f$ è continua in t_n e le due derivate sono finite; dunque $S(t_n) = f(t_n)$. In particolare, $S(t_n) = 0$

③ $f(t) = t \cos^2 \frac{\pi}{5} t \, \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]}(t)$

Osserviamo che per le formule di bisezione

$$f(t) = t \, \frac{1 + \cos \frac{2}{5}\pi t}{2} \, \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]}(t)$$

$$= \frac{1}{2}\left[t \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]}(t) + \frac{1}{2} t \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]}(t) \, e^{\frac{2}{5}\pi i t} + \frac{1}{2} t \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]} \, e^{-\frac{2}{5}\pi i t} \right].$$

Dunque

$$\hat{f}(\omega) = \frac{i}{2} \frac{d}{d\omega}\left[\frac{2 \sin \frac{5}{2}\omega}{\omega} + \frac{1}{2} \, 2 \, \frac{\sin \frac{5}{2}(\omega - \frac{2}{5}\pi)}{\omega - \frac{2}{5}\pi} + \frac{1}{2} \, 2 \, \frac{\sin \frac{5}{2}(\omega + \frac{2}{5}\pi)}{\omega + \frac{2}{5}\pi} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \frac{d}{d\omega}\left[2 \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\omega} + \frac{\sin(\frac{5}{2}\omega - \pi)}{\omega - \frac{2}{5}\pi} + \frac{\sin(\frac{5}{2}\omega + \pi)}{\omega + \frac{2}{5}\pi} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \frac{d}{d\omega}\left[2 \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\omega} - \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\omega - \frac{2}{5}\pi} - \frac{\sin \frac{5}{2}\omega}{\omega + \frac{2}{5}\pi} \right]$$

Evitiamo di calcolare esplicitamente la derivata.

(4) $$\int_6^{+\infty} e^{-4t}\left[\frac{1}{\sqrt{t-6}} - (t-6)^2\right] dt$$

Osserviamo che, data la funzione di E,

$$F(t) = H(t-6)\left[\frac{1}{\sqrt{t-6}} - (t-6)^2\right]$$

tale funzione è $\mathcal{L}$-trasformabile; abbiamo poi

$$f(s) = \int_6^{+\infty} e^{-st}\left(\frac{1}{\sqrt{t-6}} - (t-6)^2\right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-6s} - \frac{2}{s^3} e^{-6s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Pertanto

$$I = f(4) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\, e^{-24} - \frac{2}{64} e^{-24}$$

$$= e^{-24}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{32}\right).$$

---

(5) $$y_{n+2} - 12 y_{n+1} + 32 y_n = n 2^n$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0$$

Utilizzando la Z-trasformata, abbiamo

$$z^2\left[F^*(z) - 1\right] - 12 z\left[F^*(z) - 1\right] + 32 F^*(z) =$$

$$= \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$(z^2-12z+32)F^*(z) - z^2 + 12z = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$(z-4)(z-8)\,F^*(z) = z^2 - 12z + \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$F^*(z) = z\,\frac{z-12}{(z-4)(z-8)} + z\,\frac{2}{(z-2)^2(z-4)(z-8)}$$

$$= z\left[\frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-8} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{(z-2)^2}\right]$$

$$+\, z\left[\frac{E}{z-4} + \frac{F}{z-8}\right]$$

dove

$$E = \lim_{z\to 4} \frac{z-12}{z-8} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$F = \lim_{z\to 8} \frac{z-12}{z-4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$A = \lim_{z\to 4} \frac{2}{(z-2)^2(z-8)} = \frac{2}{2^2\cdot(-4)} = -\frac{1}{8}$$

$$B = \lim_{z\to 8} \frac{2}{(z-2)^2(z-4)} = \frac{2}{36\cdot 4} = \frac{1}{72}$$

$$D = \lim_{z\to 2} \frac{2}{(z-4)(z-8)} = \frac{2}{-2\cdot(-6)} = \frac{1}{6}$$

$$C = 2\lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z-4)(z-8)} = -2\lim_{z\to 2}\frac{2z-12}{(z-4)^2(z-8)^2}$$

$$= -2\,\frac{-8}{(-2)^2(-6)^2} = \frac{\cancel{16}\,\cancel{4}\,1}{\cancel{1}\cancel{4}\cdot\cancel{36}\,9} = \frac{1}{9}$$

In definitiva, abbiamo

$$F^*(z) = -\frac{1}{8}\,\frac{z}{z-4} + \frac{1}{72}\,\frac{z}{z-8} + \frac{1}{9}\cdot\frac{z}{z-2}$$

$$+\frac{1}{12}\,\frac{2z}{(z-2)^2} + 2\,\frac{z}{z-4} - \frac{z}{z-8}$$

da cui ricaviamo

$$y_n = -\frac{1}{8}\,4^n + \frac{1}{72}\,8^n + \frac{1}{9}\,2^n$$

$$+\frac{1}{12}\,n\,2^n + 2\cdot 4^n - 8^n$$

$$= \frac{15}{8}\,4^n - \frac{71}{72}\cdot 8^n + \frac{1}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{12}\,n\,2^n$$

PARTE B

(1) Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ insieme aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile in Ω. CNS affinché f sia olomorfa in $z_0 \in \Omega$ è che risulti

$$i f_x = f_y \quad \text{in } z_0$$

oppure, equivalentemente

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

---

(2) $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ limitata

$f' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \omega\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, $\omega\hat{f}$ limitata

$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

$f' \in L^2(\mathbb{R}) \implies \omega \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad t^n f \in L^1 \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{f}^{(n)} \in C_0^0(\mathbb{R})$

(cioè $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad t^n f \in L^2 \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{f}^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$

f ha supporto compatto $\equiv [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \implies$ Per il Teorema di P-W, $\hat{f}$ è analitica intera e $\exists M > 0$ t.c. $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\hat{f}(z)| \le M e^{\frac{5}{2}|\operatorname{Im} z|}$

f è dispari reale $\implies \hat{f}$ è dispari, immaginario puro

---

③ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periodica t.c. $f \in L^2(\mathbb{R})$ e f è di classe C^k a tratti con $k \geq 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k a_n)^2 < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k b_n)^2 < +\infty$$

da cui otteniamo

$$\lim_{n \to \infty} n^{2k} a_n^2 = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{2k} b_n^2 = 0$$

dove a_n e b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier.

---

(4) Proposizione (Formula del valore finale)

Sia $F \in E$ t.c. $F \in C^0([0,+\infty))$ e $\lim_{t\to+\infty} F(t) = L$ finito. Allora $\lambda_F \leq 0$ e $\lim_{\mathrm{Re}\, s \to 0} s f(s) = \lim_{t \to +\infty} F(t)$.

Proposizione (Formula del valore iniziale)

Sia $F \in E$, $\mathcal{L}$-trasf., di classe C^1 in $(0,+\infty)$. Supponiamo, inoltre che anche $F' \in E$ e che soddisfi

$$|F'(t)| \leq A e^{at} \quad \text{in } [t_0, +\infty)$$

con $t_0 \geq 0$, $A > 0$, $a \geq 0$ opportuni. Allora

$$\lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} s f(s) = \lim_{t \to 0^+} F(t).$$

---

(5) Osserviamo che

$f \in L^1$; infatti $\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\, dt = 2$

$g \in L^1$; infatti $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|t|^{3/2}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|t|^{3/2}}\, dt$

e la funzione è sicuramente integrabile in $[0,+\infty)$, dal momento che $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ per $t \to +\infty$ $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$

$h \in L^1(\mathbb{R})$, dal momento che

$$|h(t)| \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{per } t \to \pm\infty$$

$$h \in C^0(\mathbb{R})$$

Quindi

$$f, g, h \in L^1$$

e in tale condizioni vale la proprietà associativa, cioè proprio

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$